

Институт вычислительных технологий
Сибирского отделения Российской академии наук
(ИВТ СО РАН)

С.Г. Черный В.Н. Лапин
Д.В. Есипов Д.С. Куранаков

МЕТОДЫ
МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАРОЖДЕНИЯ
И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН



Издательство Сибирского отделения
Российской академии наук
Новосибирск
2016

УДК 519.63 + 531
ББК 22.193 + 22.251
Ч-49

Черный С.Г.

Методы моделирования зарождения и распространения трещин / С.Г. Черный, В.Н. Лапин, Д.В. Есипов, Д.С. Куранаков; Ин-т вычислительных технологий СО РАН. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 312 с.

Монография посвящена построению и обоснованию наиболее полных в настоящее время трехмерных моделей зарождения и распространения трещин от полости в упругой среде под действием давления закачиваемой в нее жидкости. Приведен подробный обзор моделей инициации и развития трещин гидроразрыва, критериев разрушения, численных методов механики твердого тела, которые характеризуют современное состояние научных исследований в этих областях.

Помимо описания современного состояния в монографии предложен авторский подход к решению проблемы моделирования распространения трещины. Ставятся и решаются три основных связанных задачи модели распространения: напряженно-деформированного состояния, течения жидкости гидроразрыва со сложной реологией Гершеля–Балкли, разрушения материала и распространения в нем трещины. Предлагаются новые трехмерные критерии для приращения фронта трещины и направления распространения и методы управления процессом развития трещины.

Для научных, инженерно-технических работников и проектировщиков, занимающихся проблемами механики твердого тела, механики разрушения и численных методов их решения, а также для преподавателей, студентов и аспирантов соответствующих вузов.

Рецензенты

доктор физико-математических наук, профессор С.В. Головин
доктор физико-математических наук, профессор А.И. Чанышев

Подготовка данной монографии, а также вошедшие в нее исследования выполнены при поддержке гранта Российского научного фонда (грант № 14-11-00234)

Утверждено к печати Ученым советом Института вычислительных технологий СО РАН

ISBN 978-5-7692-1508-7 © Черный С.Г., Лапин В.Н.,
Есипов Д.В., Куранаков Д.С., 2016

Оглавление

Введение	12
Глава 1. Постановка задачи моделирования распространения трещины	18
1.1. Физические процессы, определяющие развитие трещин, и их учет в моделях различных уровней	18
1.2. Одномерные модели	22
1.2.1. Модель Христиановича–Гиртсма–де Клерка (KGD)	24
1.2.2. Модель Перкинса–Керна–Нордгрена (РКН)	30
1.2.3. Гибридная РКН–KGD-модель с фильтрационными утечками жидкости в породу .	35
1.2.4. Гибридная РКН–KGD-модель с фильтрационными утечками жидкости гидроразрыва и наличием примеси пропантанта . . .	39
1.2.5. Гибридная РКН–KGD-модель с фильтрационными утечками жидкости гидроразрыва, расширенная уравнением пьезопродности в области вне трещины и уравнением переноса пропантанта в трещине . .	41
1.2.6. Одномерная модель развития трещины в пороупругой среде	43
1.2.7. Модель радиальной трещины	45
1.3. Двумерные модели	48
1.4. Псевдотрехмерные модели	50
1.5. Трехмерные модели	51
1.5.1. Модель инициации трещины гидроразрыва	52
1.5.2. Модель распространения трещины гидроразрыва	53
1.6. Области применимости моделей гидроразрыва пласта	54
Глава 2. Модель деформации среды в задачах о зарождении и распространении трещин	56

2.1.	Постановка задачи упругого равновесия	58
2.1.1.	Основные уравнения	58
2.1.2.	Граничные условия	59
2.2.	Методы решения уравнений упругого равновесия модели деформации среды	59
2.2.1.	Классический МГЭ	59
	Классический МГЭ и условие на бесконечности	63
	Неприменимость классического МГЭ для задач с вырожденной границей	64
2.2.2.	Многозонный МГЭ	65
	Постановка задачи упругости для двух подобластей	65
	Применение многозонного МГЭ для расчета тел с трещинами	67
	Построение результирующей системы линейных уравнений	68
	Разрывные граничные элементы	70
2.2.3.	Метод разрывных смещений	72
2.2.4.	Обобщенный метод конечных элементов	75
2.2.5.	Дуальный МГЭ	76
	История создания	76
	Граничное интегральное уравнение смещений	77
	Граничное интегральное уравнение напряжений	77
	Дискретизация границы и формирование системы линейных уравнений	77
	Граничные элементы и базисные функции	79
	Вычисление главного значения Адамара сингулярного интеграла	80
	Вычисление слабосингулярной части интеграла	82
	Вычисление главного значения сингулярных и гиперсингулярных интегралов	83
	Разложение в ряд ядра подынтегрального выражения	84

2.2.6.	Классический МГЭ с модификацией расчетной области	89
2.2.7.	Специальные элементы у фронта трещины	91
2.2.8.	Вычисление тензора напряжений на поверхности задачи	93
2.3.	Примеры расчета НДС	95
2.3.1.	Задача о консольной балке	95
2.3.2.	Задача о составной трубе	97
2.4.	Коэффициенты интенсивности напряжений и особенности их вычисления	99
2.4.1.	Обзор способов вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для плоской трещины	101
	Метод вычисления значения КИНов на основе J -интеграла в двумерном случае	102
2.4.2.	Интерполяционные формулы для расчета КИН на фронте трехмерной трещины . .	104
2.5.	Верификация методов расчета КИН на задаче о наклонной трещине	105
2.5.1.	Постановка задачи о наклонной трещине	105
2.5.2.	Выбор ширины пропила при использовании МГЭ с модификацией области	107
2.5.3.	Сравнение точности интерполяционных формул	109
2.5.4.	Влияние выбора типа элементов в дуальном МГЭ на точность расчета КИН . . .	111

Глава 3. Критерии разрушения и построение зародышевых трещин **115**

3.1.	Критерии разрушения	116
3.1.1.	Общий вид критерия разрушения	117
3.1.2.	Классические критерии, не учитывающие эффект размера	118
3.1.3.	K_I -критерий	118
3.1.4.	Критерии, основанные на модели сцепления	119
3.1.5.	d -критерий	120
3.1.6.	Критерий Базанта	121

3.1.7.	<i>R</i> -критерий	121
3.2.	Построение зоны разрушения и зародышевой трещины	122
	Построение зоны разрушения	123
	Построение зародышевой трещины	124
3.3.	Валидация критериев разрушения	125
3.3.1.	Разрушение блоков с цилиндрическими отверстиями	125
3.3.2.	Разрушение блоков с боковыми вырезами	127
3.3.3.	Зарождение трещины при разрушении скважины с пропилами	131
	Описание эксперимента и интерпретация результатов	131
	Скважина с пропилами малой глубины	133
	Скважина с пропилами большой глубины	135
3.3.4.	Зарождение трещины при разрушении перфорированной скважины	137
	Разрушение перфорации	139
	Разрушение ствола скважины	141
3.4.	Пример моделирования разрушения перфорированной скважины и зарождения трещины от нее	143
3.4.1.	Постановка задачи	143
	Модель необсаженной скважины	144
	Модель обсаженной скважины	145
3.4.2.	Основные параметры задачи и их влияние на давление инициации трещины от необсаженной скважины	146
	Ориентация перфорации	148
	Напряжения породы в естественном залегании	150
	Диаметр перфорации	152
	Длина перфорации	154
	Форма перфорации	155
3.4.3.	Влияние обсадной колонны на процесс зарождения трещины	156
3.5.	Пример моделирования разрушения перфорированной скважины глубокого залегания	159
3.5.1.	Постановка задачи	160

Формализация ориентации скважины и перфорации	162
Приближенный учет влияния обсадной колонны	164
3.5.2. Влияние сетки	167
3.5.3. Влияние угла перфорации β	168
3.5.4. Изменение давления инициации вдоль перфорации	170
3.5.5. Влияние обсадной колонны	171
3.5.6. Использование d -критерия для предсказания разрушения скважины глубокого залегания	173
Глава 4. Критерии распространения трещин	175
4.1. Критерий скорости высвобождения упругой энергии	175
4.2. Модифицированный критерий усталостного разрушения на основе формулы Пэриса–Эрдогана .	180
4.3. Критерии поворота фронта трещины в трехмерном случае	183
4.3.1. Формулировка критерия распространения трещины в трехмерном случае	183
4.3.2. Неявный алгоритм выполнения критериев распространения	185
4.3.3. Применение неявного алгоритма для демонстрации влияния третьей моды КИН	187
4.4. Задача о распространении трещины при квазистатическом нагружении	189
4.4.1. Трещина в упругом материале, подверженном растягивающим напряжениям . .	190
4.4.2. Нагруженная давлением трещина в материале, сжатом внешними напряжениями .	192
Глава 5. Модели для описания движения жидкости в трещине	195
5.1. Общая модель сжимаемой неньютоновской жидкости Гершеля–Балкли	195
5.1.1. Уравнения движения жидкости в пространстве	195

5.1.2.	Двумерные уравнения движения неньютоновской жидкости в трехмерной трещине	197
	Несжимаемая неньютоновская жидкость	200
	Сжимаемая ньютоновская жидкость . . .	201
5.1.3.	Граничные условия для уравнений движения жидкости в трещине	202
5.2.	Численный метод решения уравнений движения жидкости	203
5.2.1.	Решение уравнений движения несжимаемой ньютоновской жидкости	203
5.2.2.	Решение уравнений движения неньютоновской и сжимаемой жидкостей	205
5.3.	Верификация алгоритма решения уравнений движения жидкости	206
5.3.1.	Плоское движение ньютоновской жидкости в канале постоянного сечения	207
5.3.2.	Плоскорадиальное движение жидкости Гершеля–Балкли в канале постоянной ширины при заданном расходе	208
5.3.3.	Плоскорадиальное движение жидкости Гершеля–Балкли в канале постоянной ширины при заданном перепаде давления	209
5.3.4.	Распространение плоской радиальной трещины под действием закачки жидкости Гершеля–Балкли	210
5.4.	Моделирование распространения трехмерной трещины, вызванного закачкой жидкости Гершеля–Балкли	213
5.4.1.	Чувствительность поведения трещины к углу наклона скважины	213
5.4.2.	Чувствительность поведения трещины к реологическим параметрам жидкости	214
	Влияние фактора консистенции	215
	Влияние критического напряжения сдвига	218
	Влияние показателя степени	219
	Влияние параметров реологии при постоянной кажущейся вязкости	221

5.4.3.	Влияние реологии при малых сдвиговых напряжениях	225
5.4.4.	Предельное напряжение сдвига в жидкости как причина остановки трещины гидроразрыва	227
5.5.	Моделирование распространения трещины, вызванного закачкой слабосжимаемой жидкости .	229
Глава 6. Метод совместного решения уравнений трещины гидроразрыва 232		
6.1.	Квазистатический рост трещины	233
6.2.	Рост трещины под действием вязкой жидкости	235
Глава 7. Примеры трехмерного моделирования распространения трещин гидроразрыва пласта 238		
7.1.	Верификация трехмерной модели на одномерных задачах распространения трещин	238
7.1.1.	Распространение поперечной радиальной трещины	238
7.1.2.	Сравнение с аналитическим решением, полученным для режима распространения с доминирующей вязкостью	240
7.2.	Моделирование распространения продольной трещины в трехмерной постановке	242
7.2.1.	Квазистатическое распространение продольной трещины от скважины с круговыми пропилами	242
7.2.2.	Динамическое распространение продольной трещины	245
7.3.	Влияние основных параметров на распространение продольной трещины	246
7.3.1.	Постановка вспомогательной задачи для анализа чувствительности процесса распространения	246
7.3.2.	Влияние вязкости жидкости	247
7.3.3.	Влияние скорости закачки	248
7.3.4.	Влияние угла наклона начальной трещины	248
7.4.	Моделирование распространения поперечной трещины в трехмерной постановке	250

7.4.1.	Сравнение квазистатического и динамического роста трещины	250
7.4.2.	Влияние скважины на распространение трещины	251
7.5.	Влияние основных параметров на одновременное распространение двух параллельных трещин . .	252
7.5.1.	Распространение поперечной трещины от скважины с пропилами	252
7.5.2.	Основные параметры пропилов и их влияние на распространение трещин	254
	Расстояние между пропилами	254
	Глубина	255
	Ширина	256
	Угол наклона	256

Глава 8. Методы оптимизации в задачах распространения трещин и проектирования гидроразрыва пласта **260**

8.1.	Подходы к оптимизации процесса ГРП	260
8.2.	Прямая задача моделирования распространения трещины	263
8.2.1.	Плоскорадиальная модель трещины, распространяющейся под действием закачки смеси жидкости Гершеля–Балкли с проппантом	264
8.2.2.	Законы закачки смеси и проппанта . . .	267
	Закон закачки смеси $Q_{in}(t)$	267
	Закон закачки проппанта $\delta_{in}(t)$	268
8.2.3.	Решение прямой задачи	269
8.2.4.	Модель продуктивности пласта	270
	Фiltrация жидкости в трещине, заполненной проппантом	271
	Фiltrация нефти из пласта в трещину .	272
8.3.	Результаты решения прямой задачи	272
8.4.	Обратная задача ГРП	275
8.4.1.	Постановка задачи	275
	Переменные	275
	Ограничения	275
	Целевые функционалы	276

	Общая математическая постановка	280
8.4.2.	Метод решения	280
8.5.	Результаты решения обратной задачи	281
8.5.1.	Вариация закона закачки смеси	281
	Одноцелевая оптимизация	281
8.5.2.	Двухцелевая оптимизация	284
8.5.3.	Вариация закона закачки пропанта	287
	Одноцелевая оптимизация	287
	Двухцелевая оптимизация	289
8.6.	Заключение	290

Введение

Построение и обоснование наиболее полных трехмерных численных моделей зарождения и распространения трещины от полости в упругой среде под действием давления жидкости, включающих в себя математические модели и численные методы для их реализации, является важной научной и прикладной задачей. Научная значимость решения данной проблемы для механики трещин заключается в необходимости установления механизмов влияния реологии закачиваемой в полость и трещину жидкости, обобщенного напряженного состояния среды, ее упругих свойств на местоположение зародышевой трещины в окрестности границы произвольной трехмерной полости, ориентацию этой зародышевой трещины, ее эволюцию, траекторию трещины на ранней стадии ее распространения, ее раскрытие. В области математического моделирования и численных методов построение новых наиболее полных трехмерных математических моделей механики трещин, их обоснование, разработка надежных, совершенных численных методов чрезвычайно актуальны в связи с необходимостью адекватного описания механики разрушения материала и связанными с этим огромными затратами вычислительных ресурсов.

Одна из основных подзадач, решаемых при разработке сложной комплексной модели распространения трещины, состоит в построении трехмерного критерия для нахождения величины приращения фронта трещины на каждом шаге ее распространения и выбора направления распространения, учитывающего все три коэффициента интенсивности напряжений. Эта подзадача до конца не решена в настоящее время. С позиций вычислительной механики остается также актуальной проблемой создание эффективного метода совместного реше-

ния трех основных связанных задач модели распространения: напряженно-деформированного состояния, течения жидкости гидроразрыва со сложной реологией, разрушения материала и распространения в нем трещины.

Научная значимость проблемы трехмерного моделирования распространения трещины заключается и в необходимости создания методов управления процессом развития трещины, которые позволяли бы проектировать жидкости, закачиваемые в полость и трещину, с новыми реологическими законами, определять законы их закачки и условия инициации зародышевой трещины, при которых форма трещины, направление и скорость распространения ее фронта удовлетворяли заданным критериям качества. Эту научную проблему можно отнести к теории разработки методов решения обратных задач трещинообразования. В данном случае прямой задачей является нахождение по входным данным модели распространения трещины ее выходных данных. Обратной задачей является определение таких входных данных, при которых функционалы, зависящие от выходных данных, удовлетворяют заданным критериям качества трещинообразования.

Прикладная значимость решения проблемы построения трехмерной модели зарождения и распространения трещины в первую очередь обусловлена усовершенствованием и созданием новых технологий гидроразрыва пласта (ГРП). ГРП является методом повышения отдачи нефтеносного и газоносного пласта и заключается в подаче в перфорированную скважину под высоким давлением жидкости гидроразрыва. Под действием давления жидкости в области перфорации около скважины иницируется зародышевая трещина, в дальнейшем распространяющаяся в нетронутым массиве породы и заполняемая при этом твердыми частицами, называемыми проппантом. После прекращения закачки смеси жидкости с проппантом и утечки жидкости через берега трещины в породу происходит закрепление трещины на проппанте. Закрепленная трещина становится высокопроводящим каналом для откачивания нефти или газа из несущего пласта.

Моделирование процесса ГРП позволяет прогнозировать геометрию трещины и оптимизировать всю технологию дан-

ного процесса. Ведется давно, с 50-х годов XX века, когда ГРП как метод увеличения продуктивности скважины начал использоваться. Тогда же, в 1955 г. была предложена одна из первых моделей ГРП — модель Христиановича–Желтова [1], получившая дальнейшее развитие в работе Гиртсма и де Клерка [2] и известная во всем мире как модель Христиановича–Гиртсма–де Клерка (KGD). Немного позднее были созданы еще две известные, широко используемые и в настоящее время модели: модель Перкинса–Керна–Нордгрена (РКН) [3, 4] и модель плоскорадиальной трещины [5]. Эти три модели представляют соответственно три основные геометрические концепции в множестве плоских одномерных моделей: прямолинейное распространение трещины из линейного источника бесконечной высоты, прямолинейное распространение трещины из линейного источника конечной высоты и радиальное симметричное распространение трещины из точечного источника. Эти модели и их модификации достаточно хорошо описывают ГРП для типичных ориентаций скважин в традиционных месторождениях нефти и газа, предполагающих вертикальное или наклонное бурение и одну трещину гидроразрыва на одну скважину.

Однако в настоящее время все большее место в мире занимает разработка нетрадиционных месторождений, которые характеризуются более сложной структурой нефтеносных и газоносных пластов. Отличительными особенностями таких пластовых резервуаров являются низкая (плотный песок) и ультранизкая (сланцевые газ и нефть) или наоборот экстремально высокая (песчаник с тяжелой нефтью) проницаемость пласта, присутствие разветвленной системы трещин, которые могут содержать одно или более семейств трещин, ориентированных в различных направлениях и пересекающих друг друга. Очень часто разработка таких нетрадиционных месторождений становится экономически невыгодной без такой интенсификации добычи, как ГРП. В то же время традиционные модели ГРП не позволяют адекватно описывать эти процессы и требуются новые более изысканные (современные, продвинутые, усовершенствованные) модели.

Одно из направлений усовершенствования моделей — учет в них трехмерности процесса распространения. Как уже отмеча-

лось выше, для реалистичного описания продвижения фронта трещины в произвольном трехмерном случае необходимо применять трехмерный критерий нахождения приращения фронта трещины и выбора направления его распространения, учитывающий смешанное нагружение по всем трем модам напряжений. Среди существующих работ, посвященных трехмерным моделям распространения [6–15], во всех, кроме [7], отклонение фронта трещины определяется только по второй моде. В них используется двумерный плоский критерий максимальных растягивающих напряжений [16], не учитывающий третью моду. Только Гупта и Дуартэ [7] предпринимают попытку применить трехмерный критерий. В [17–19] новая полностью трехмерная численная модель распространения трещины от полости под воздействием давления закачиваемой ньютоновской жидкости с трехмерным критерием распространения была построена и верифицирована.

Еще одной отличительной особенностью разработанной в [17–19] модели является одновременное рассмотрение в ней скважины и переменной нагрузки, вызванной течением жидкости, в распространяющейся от скважины трещине. Следует отметить, что во всех перечисленных выше работах по трехмерному моделированию распространения трещины, за исключением [17–19], скважина не присутствует в модели. В лучшем случае рассматривается переменная нагрузка в трещине, вызванная закачиванием в нее ньютоновской жидкости из точечного источника [8, 10–12, 15].

Следует также отметить, что технологическая разработка нетрадиционных пластовых резервуаров сопровождается проектированием новых жидкостей гидроразрыва и различных добавок к ним (волокна, флока и др.), которые значительно изменяют реологическое поведение этих жидкостей. Например, возрастающий интерес к плотным и ультраплотным нетрадиционным пластовым резервуарам с высоким содержанием глины привел в результате к разработке специальных жидкостей с большими долями газа и малыми долями воды [20]. Эти жидкости не ухудшают фильтрационные свойства породы и не вызывают ее физическое разрушение при их закачивании. Большинство таких вспененных жидкостей, по сообщению [21],

имеют реологию жидкости Гершеля–Балкли [22]. Эта реологическая модель жидкости успешно применялась для описания других типов жидкостей гидроразрыва и при фильтрации в пористой среде [20]. Преимущество реологического закона Гершеля–Балкли состоит в том, что он содержит в себе более простые реологические модели как его частные случаи: ньютоновскую, степенную, Бингама–Шведова. Последние две реологические модели часто используются в моделях гидравлического разрыва, в частности, при моделировании переноса проппанта и его осаждения. Для исследования влияния реологии жидкости на поведение процесса гидроразрыва пласта в монографии разработанные ранее авторами модели [17–19] совершенствуются путем замещения в них ньютоновской модели жидкости моделью Гершеля–Балкли.

Кроме совершенствования и создания новых технологий ГРП для повышения отдачи нефтеносных и газоносных пластов, теория трехмерного моделирования зарождения и распространения трещины необходима для разработки инструментальных методов, применяемых в строительстве подземных сооружений в сложных геолого-физических условиях (карьеры, рудники, туннели, атомные электростанции). Это – методы управляемого разрушения и разгрузки массивов горных пород, создания в них дренажных систем, изолирующих экранов, упрочнения рыхлых пород, откачки воды или газа, изоляции и перекрытия источников поступления пластовых вод и др.

В монографии обобщается опыт моделирования процесса зарождения и распространения трещины от полости в упругой среде под воздействием закачиваемой в полость в общем случае неньютоновской жидкости. Книга является некоторым логически законченным этапом исследований, проводившихся авторами на протяжении более десяти лет в Институте вычислительных технологий СО РАН. Данные исследования вначале были инициированы и финансово поддержаны Новосибирским технологическим центром (НТЦ) компании “Шлюмберже”. В сотрудничестве со специалистами НТЦ были предложены и численно реализованы двумерные модели распространения трещины, являющиеся обобщением известной KGD-модели [23–27], построены численные методы решения зада-

чи зарождения трещины гидроразрыва от скважины, основанные на локальном критерии превышения максимальным растягивающим напряжением критического напряжения на разрыв упругой среды [28–38]. Исследования по разработке методов оптимального решения трехмерной задачи зарождения и распространения трещины от полости в упругой среде под воздействием закачиваемой в нее вязкой, в общем случае неньютоновской жидкости [17–19, 39–42], проводимые с 2014 года, выполнены за счет гранта Российского научного фонда (РНФ) (проект № 14-11-00234). Таким образом, можно утверждать, что представленные в монографии исследования по решению заявленных в проекте № 14-11-00234 задач (критерий инициации трещины на полости, учитывающий ее форму; модифицированный трехмерный дуальный метод граничных элементов; трехмерные критерии роста и выбора направления распространения трещины, учитывающие все три коэффициента интенсивности напряжений; модель жидкости гидроразрыва Гершеля–Балкли; метод оптимизационного управления процессом развития трещины) выполнены только за счет указанного гранта РНФ.

Некоторые результаты, включенные в книгу, получены совместно с ближайшими коллегами и учениками авторов. Особенно хотелось бы поблагодарить О. П. Алексеенко, Г. Р. Айдагулова, А. Е. Лютова, Д. В. Чиркова, П. В. Карнакова, А. С. Астракову, А. Ю. Авдюшенко, А. Е. Крюкова, Д. Т. Алипову.

Глава 1

Постановка задачи моделирования распространения трещины

1.1. Физические процессы, определяющие развитие трещин, и их учет в моделях различных уровней

Для повышения отдачи нефтеносного пласта применяется технология формирования в нем трещины гидроразрыва, подробно описанная в [43]. Технология заключается в подаче в перфорированную скважину под высоким давлением жидкости гидроразрыва. Под действием давления жидкости в области перфораций около скважины инициируется зародышевая трещина. Затем жидкость, надавливая на берега зародышевой трещины, заставляет ее распространяться в нетронутый массив породы, как показано на рис. 1.1. Для закрепления раскрытия трещины через определенное время от начала подачи жидкости гидроразрыва в нее добавляются твердые частицы — пропант. После прекращения закачки смеси жидкости с твердыми частицами и фильтрационной утечки жидкости в породу раскрытие трещины определяется распределением вдоль нее проп-

панта. Пропускная способность закрепленной трещины существенно зависит от ее формы и распределения по ней пропан-та.

Моделирование процесса гидроразрыва пласта — роста трещины с учетом потерь жидкости гидроразрыва на фильтрацию в пористую среду и, наконец, определение влияния примеси твердых частиц в жидкости на динамику раскрытия трещины и ее конечную форму позволяют прогнозировать геометрию трещины и оптимизировать всю технологию этого процесса. Однако в наиболее общей постановке модель процесса гидроразрыва чрезвычайно сложна. Она объединяет в себе описание таких процессов, как течение смеси неньютоновской жидкости и твердых частиц внутри трещины, перенос и осаждение твердых частиц, фильтрация жидкости в породу через поверхность трещины, деформация породы в окрестности скважины и трещины, распространение трещины. Уравнения, описывающие перечисленные процессы, нелинейны, сильно взаимосвязаны и имеют различные особенности.



Рис. 1.1. Схематичная картина процесса гидроразрыва пласта.

Совместное их решение в двумерных, а особенно в трехмерных задачах остается актуальной проблемой из-за плохой сходимости численных алгоритмов. Поэтому при создании модели приходится искать компромисс между вычислительной сложностью алгоритмов и детальностью описания каждого из процессов. Развитие вычислительной техники смещает точку компромисса в сторону совершенствования моделей, но оно все еще недостаточно для отказа от приближенного описания процессов или пренебрежения какими-либо из них. Наиболее существенно снижают вычислительную сложность упрощения при описании процессов деформации породы и ее разрушения, что связано существенно с трехмерностью этого процесса в общем случае. Такие упрощения позволяют уменьшить размерность всей задачи.

По детальности описания деформации породы все модели гидроразрыва пласта можно разделить на четыре группы, характеризующиеся размерностью уравнений, описывающих деформацию породы под действием давления жидкости гидроразрыва. В одномерных моделях эти уравнения могут быть сведены либо к алгебраическому соотношению, связывающему избыточное давление в трещине с ее шириной, либо к интегральному соотношению между данными параметрами. В двумерных моделях деформация породы рассматривается в приближении плоского деформированного состояния породы, что увеличивает размерность подмодели упругости на единицу. Очевидно, что в случае псевдотрехмерных и «полностью» трехмерных моделей никакие существенные упрощения в подмодели упругости невозможны. Однако ввиду представления трещины как плоского разреза псевдотрехмерные модели выделяются в отдельную группу.

В представленный далее обзор включены ставшие уже классическими как в русско-, так и в англоязычной литературе одномерные модели, получившие свои названия по первым буквам фамилий авторов, последовательно их развивавших: модель KGD (Khristianovich, Geertsma, de Klerk), модель PKN (Perkins, Kern, Nordgren), радиальная модель и их современные улучшенные модификации. Основными путями их улучшения являются учет: 1) фильтрационных утечек жид-

кости гидроразрыва через стенки трещины в породе и 2) переноса и осаждения в трещине проппанта (примеси твердых частиц, необходимых для расклинивания трещины). Одномерные модели имеют два существенных недостатка: 1 – трещина рассматривается как плоский разрез и 2 – трещина распространяется только в продольном направлении. Несмотря на простоту этих моделей и их неспособность предсказывать результаты реальных гидроразрывов на достаточном уровне точности, они позволяют описывать взаимное влияние процессов фильтрации, течения жидкости, переноса проппанта, деформации и разрушения. Это делает их фундаментом для развития моделей каждого из процессов и оценки их влияния на качество описания поведения всей трещины.

Дальнейшее совершенствование моделей гидроразрыва направлено на устранение указанных недостатков. Рассмотрение искривления траектории трещины в горизонтальной плоскости позволило разработать двумерные модели гидроразрыва, а учет наряду с продольным и вертикального распространения трещины привел к созданию псевдотрехмерных моделей. Известно, что учет искривления траектории трещины от момента инициации последней до ее выхода на магистральное направление распространения поперек действия наименьших напряжений залегания очень важен с практической точки зрения [44]. Отметим также, что в псевдотрехмерных моделях трещина остается плоской, а следовательно, распространяется только в одной плоскости. В обзоре рассмотрены и «полностью» трехмерные модели, не получившие пока широкого применения, в силу высокой вычислительной трудоемкости. На сегодня исключительно за рубежом имеется ряд работ [6–15], посвященных численному моделированию процесса гидроразрыва в трехмерной постановке. Однако предлагаемые модели рассматриваются со значительными упрощениями: с отсутствием отставания фронта жидкости от фронта трещины, с плоским критерием выбора направления распространения трещины, без учета полостей, от которых зарождается трещина, с ньютоновской реологией жидкости и т. п. Перечисленные упрощения не позволяют адекватно предсказывать поведение трещин на начальном этапе [44], когда трещина распространяется, существенно искривляясь. Заметим, что предлагаемый в моногра-

фии подход свободен от указанных недостатков, ввиду продуманной иерархии математических моделей и предлагаемого метода совместного решения подсистем уравнений общей модели. Следует учесть, что ввиду сложности начальной геометрической конфигурации перфорированной скважины «полностью» трехмерные модели гидроразрыва должны решать подпроблему инициации зародышевых трещин, также представляющую практический интерес [44].

За последние три десятилетия в зарубежной печати появилось несколько обзоров [45–51]. Однако все эти публикации в основном сосредоточены на рассмотрении классических моделей. В связи с развитием вычислительной техники, а следовательно, и численных методов в последнее время появилось немало новых подходов к моделированию процесса гидроразрыва. Одна из задач представленного обзора – отразить особенности современных подходов к моделированию данного процесса.

1.2. Одномерные модели

Описание особенностей современных подходов и трудностей моделирования процесса гидроразрыва уместно начать с одномерных моделей.

Одномерные модели характеризуются плоским симметричным представлением трещины гидроразрыва. Однако в зависимости от геометрической концепции, используемой в этих моделях, они, в свою очередь, могут быть отнесены к двум группам.

Первая группа состоит из моделей, описывающих прямолинейное распространение трещины, исходящее из линейного источника, как показано на рис. 1.2. Такой тип гидроразрыва может быть достигнут закачкой через большой отперфорированный интервал скважины, на котором сформировался линейный источник закачки. Следовательно, такие плоские трещины должны локализоваться в вертикальной плоскости, проходящей через ось скважины.

Вторая группа моделей описывает радиально симметричное распространение из точечного источника, как показано на рис. 1.3. Такой тип гидроразрыва можно ожидать при закачке

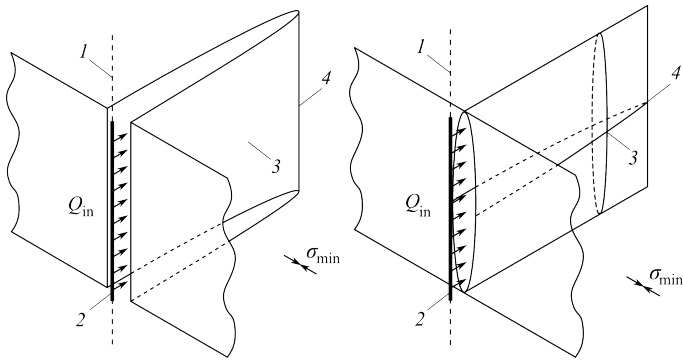


Рис. 1.2. Одно крыло трещины гидроразрыва в представлении KGD-модели (слева) и PKN-модели (справа) с прямолинейным распространением из линейного источника: 1 — вертикальная ось скважины, 2 — линейный источник жидкости, 3 — плоское крыло трещины, 4 — кончик трещины.

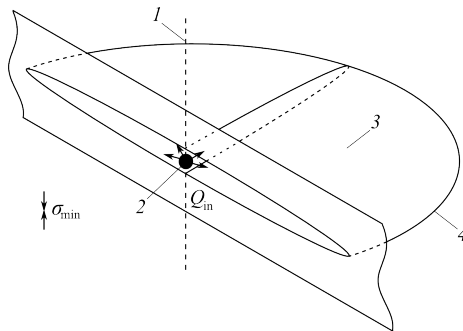


Рис. 1.3. Модель с радиально симметричным распространением из точечного источника: 1 — ось скважины, 2 — точечный источник жидкости, 3 — плоскость распространения трещины, 4 — кончик трещины.

через узкий окружной слой перфораций, при котором создается точечный источник закачки. Если исключить из рассмотрения эффекты силы тяжести, то плоскость распространения трещины в этом случае может располагаться под любым углом относительно оси скважины.

Отличительными особенностями моделей первой группы являются [43, 46, 48, 49, 51]: наличие в задаче вертикальной плоскости симметрии, перпендикулярной направлению действия наименьших главных напряжений σ_{\min} залегания, вдоль

которой трещина постоянной высоты распространяется; предположение о том, что течение жидкости гидроразрыва является квазиоднородным вдоль длины трещины (при этом учитывается переменность сечений трещины вдоль длины); трещина гидроразрыва состоит из двух разнонаправленных симметричных относительно скважины крыльев, что позволяет рассматривать только одно крыло трещины.

Отличительными особенностями моделей второй группы являются [43, 46, 48, 49, 51]: наличие в задаче горизонтальной плоскости симметрии, перпендикулярной направлению действия наименьших главных напряжений залегания σ_{\min} , вдоль которой трещина распространяется; наличие осевой симметрии в горизонтальной плоскости.

В обеих группах моделей утечка жидкости в породу описывается законом Картера [52] или простейшими уравнениями фильтрации в пористой среде [53–60]. Деформация породы описывается однородной изотропной моделью упругости, которая сводится к простейшему алгебраическому соотношению, связывающему избыточное давление в трещине с ее шириной в РКН-моделях, и интегральному соотношению между ними же в KGD-моделях.

1.2.1. Модель Христиановича–Гиртсма–де Клерка (KGD)

Основные принципы этой модели, в том числе геометрическая концепция, показанная на рис. 1.4, предложены Христиановичем и Желтовым в 1955 г. в работе [1] и затем развиты Гиртсма и де Клерком в [2]. Такая геометрическая концепция справедлива при допущении, что высота трещины значительно превосходит ее общую длину $2L$ и влиянием верхней и нижней границ можно пренебречь. Это позволяет считать горизонтальные сечения трещины одинаковыми и при описании деформации породы и ее разрушения использовать двумерную постановку задачи упругости.

В квазистатическом приближении и предположении отсутствия сдвиговых напряжений на берегах прямолинейной тре-

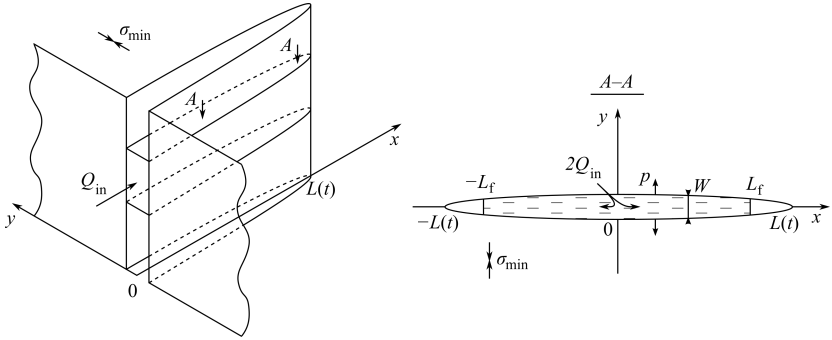


Рис. 1.4. Геометрическая концепция KGD-модели.

щины следует интегральное соотношение между его раскрытием W и избыточным давлением жидкости

$$p_{\text{net}} = p - \sigma_{\text{min}} \quad (1.1)$$

в нем (см. подробнее [61])

$$W(x) = \frac{4}{\pi E'} \int_0^L p_{\text{net}}(\xi) \ln \left| \frac{\sqrt{(L^2 - x^2)} + \sqrt{(L^2 - \xi^2)}}{\sqrt{(L^2 - x^2)} - \sqrt{(L^2 - \xi^2)}} \right| d\xi. \quad (1.2)$$

Здесь E' — плоский модуль напряжений, связанный с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν , характеризующими упругие свойства породы, следующей формулой:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (1.3)$$

а $L = L(t)$ — положение кончика крыла трещины. Положение кончика L определяется из известного критерия хрупкого распространения трещины [62] (о теории хрупкого распространения трещин см. подробнее в [63])

$$K_I = 2\sqrt{\frac{L}{\pi}} \int_0^L \frac{p_{\text{net}}(\xi)}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} d\xi = K_{Ic}, \quad (1.4)$$

где K_I — коэффициент интенсивности напряжений для плоской трещины, нагруженной переменным давлением, а K_{Ic} —

его критическое значение (трещиностойкость), характеризующее породой. Условие (1.4) задает профиль раскрытия крыла трещины около кончика

$$W(x) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{K_{Ic}}{E'} \sqrt{L-x} + O\left((L-x)^{\frac{3}{2}}\right), \quad x \rightarrow L. \quad (1.5)$$

В [1, 2, 64, 65] полагается отсутствие трещиностойкости породы, тогда критерий распространения трещины аналогично (1.5) задает плавное смыкание берегов трещины в кончике [66], т. е.

$$\left. \frac{\partial W(x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (1.6)$$

Отметим, что KGD-модели с иными критериями распространения, например с пластическим [67], не получили распространения.

Движение жидкости гидроразрыва в трещине описывается в одномерном приближении при пренебрежении инерцией, сжимаемостью жидкости и потерей импульса при ее оттоке в породу. Областью течения жидкости считается интервал от нуля до фронта жидкости $L_f(t)$, положение которого в зависимости от варианта модели может как совпадать, так и не совпадать с положением кончика трещины $L(t)$. В последнем случае говорят об отставании фронта жидкости. Уравнение количества движения следует из решения задачи о течении ньютоновской жидкости между двумя параллельными плоскостями, разнесенными на расстояние W (см. подробнее [68]):

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{12\mu}{W^2}u, \quad (1.7)$$

где $u(x, t)$ — средняя скорость жидкости вдоль крыла трещины, а μ — коэффициент динамической вязкости жидкости гидроразрыва. Если ввести локальный расход жидкости через сечение x единичной высоты трещины $Q = Q(x, t)$, то уравнение (1.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{12\mu}{W^3}Q. \quad (1.8)$$

Уравнение неразрывности записывается в виде (см. подробнее [69])

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Q_L = 0. \quad (1.9)$$

Здесь Q_L — величина утечки жидкости гидроразрыва через берега трещины в породе. В работе [1] и в ряде дальнейших работ [62, 65, 70–72] полагается ее отсутствие $Q_L(x, t) = 0$. В большинстве современных работ [2, 73] считается, что утечка Q_L подчиняется эмпирическому закону Картера [52]

$$Q_L(x, t) = \frac{2C_L}{\sqrt{t - t_{\text{exp}}(x)}}, \quad (1.10)$$

где C_L — коэффициент утечки, характеризующийся проницаемостью породы, а $t_{\text{exp}}(x)$ — момент времени, в который фронт жидкости L_f прошел точку x , т. е.

$$t_{\text{exp}}[L_f(t')] = t', \quad 0 \leq t' \leq t. \quad (1.11)$$

Другими словами, $t_{\text{exp}}(x)$ есть обратная к $L_f(t)$ функция. Если отсутствует отставание фронта жидкости от кончика трещины $L_f = L$, то $t_{\text{exp}}(x)$ есть обратная к $L(t)$ функция.

К системе уравнений (1.8) и (1.9) добавляются краевые условия. На скважине задается расход жидкости гидроразрыва в крыло трещины

$$Q(0, t) = Q_{\text{in}}(t). \quad (1.12)$$

Как правило, считается [1, 2, 64, 65, 70, 73], что жидкость занимает весь объем крыла трещины вплоть до кончика, тогда краевое условие в кончике крыла имеет вид

$$Q(L, t) = 0. \quad (1.13)$$

Из (1.12) и (1.13), используя уравнение (1.9) при предположении о постоянстве расхода Q_{in} закачиваемой в скважину жидкости, может быть получено известное уравнение баланса жидкости

$$Q_{\text{in}} t = \int_0^{L_f(t)} W(x, t) dx + \int_0^t \int_0^{L_f(\tau)} Q_L(x, \tau) dx d\tau. \quad (1.14)$$

Однако в такой постановке, с учетом $W(L) = 0$, следует, что давление жидкости гидроразрыва в кончике крыла трещины обращается в бесконечность [74]. Чтобы избежать этого, в ряде работ, посвященных вычислительной реализации модели (см., например, [71]), предполагается наличие отставания фронта жидкости L_f от кончика трещины

$$L - L_f > 0. \quad (1.15)$$

Тогда положение фронта жидкости в крыле трещине L_f определяется из соотношения

$$Q(L_f, t) = 0, \quad (1.16)$$

а краевое условие на фронте жидкости принимает вид

$$p_{\text{net}}(L_f, t) = -\sigma_{\text{min}}. \quad (1.17)$$

Условие (1.17) задает нулевое полное давление на фронте жидкости. Заметим, что давление p_{net} на участке от L_f до L также полагается равным $-\sigma_{\text{min}}$. Из (1.12) и (1.16), используя уравнение (1.9), можно получить уравнение баланса жидкости (1.14) с учетом замены L_f на L .

Для замыкания поставленной задачи задаются начальные данные

$$\begin{aligned} L(0) &= L_0, & L_f(0) &= L_0, \\ W(x, 0) &= W_0, & 0 \leq x \leq L_0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где W_0 и L_0 — длина и раскрытие некоторой зародышевой трещины, которая необходима для начала развития трещины. В работах [24, 73, 75] показано, что влияние этих параметров на распространение одномерных и двумерных трещин незначительно.

Обобщенная KGD-модель без отставания фронта жидкости от кончика трещины описывается интегральным соотношением (1.2), условием (1.4) или (1.5), уравнениями (1.8) и (1.9), двумя из трех краевых условий (1.12), (1.13) и (1.14) и начальными данными (1.18). Заметим, что при этом считается $K_{Ic} > 0$. Обобщенная KGD-модель с отставанием фронта жидкости

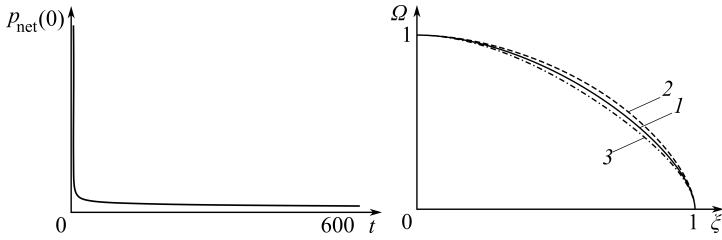


Рис. 1.5. Поведение избыточного давления $p_{\text{net}}(0)$ (слева), обезразмеренное раскрытие трещины Ω (справа) в зависимости от расхода $Q_{\text{in}} = 1$ (1), 10 (2), 100 (3).

от кончика трещины описывается интегральным соотношением (1.2), условием (1.4) или (1.5), уравнениями (1.8) и (1.9), тремя крайевыми условиями (1.12), (1.16) и (1.17) и начальными данными (1.18). В отсутствие трещиностойкости породы условие (1.4) или (1.5) в модели заменяется на более простое условие (1.6).

При значительных упрощениях в [1] впервые были получены кривые раскрытия трещины вдоль ее длины. Было установлено, что давление в скважине с течением времени резко уменьшается, как показано слева на рис. 1.5. Справа на рис. 1.5 приведены обезразмеренные раскрытия трещины Ω в случае отсутствия утечек ($Q_L = 0$)

$$\Omega(\xi) = \frac{W(\xi)}{W(0)}, \xi = \frac{x}{L}. \quad (1.19)$$

В [70] было установлено, что в отсутствие утечки (1.10) весь процесс гидроразрыва оказывается равновесным, т.е. в каждый момент времени он определен параметрами состояния независимо от предыстории. В [73] получено, что при больших временах развития трещины ее поведение в основном определяется величиной утечек жидкости гидроразрыва в породе.

KGD-модель включает в себя механику трещиностойкости породы (1.4). В [73] показано, что при больших временах трещиностойкость влияет исключительно на профиль раскрытия крыла трещины около кончика. Концепция отставания жидкости от кончика трещины является важным элементом механики кончика трещины (1.15). В работах [74, 76–78] отдельно рассмотрено это явление и установлено, что наличие отставания

фронта жидкости от кончика трещины влияет исключительно на профиль раскрытия крыла трещины около его кончика при достаточно больших длинах L .

Отметим, что в работе [64] было предложено более реалистичное представление жидкости гидроразрыва как неньютоновской со степенной реологией (псевдопластическая жидкость). В таком случае уравнение количества движения (1.8) принимает вид

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n} \frac{\mu}{W^{2n+1}} Q^n, \quad (1.20)$$

где n — показатель степени закона связи напряжений со скоростями деформации, а μ — мера консистенции жидкости, имеющая физический смысл, аналогичный вязкости ньютоновской жидкости, но отличающаяся от нее размерностью: Па·с ^{n} вместо Па·с. В такой постановке без запаздывания фронта жидкости (1.15) в [65] были найдены автомодельные решения и получено, что увеличение показателя n приводит к увеличению скорости распространения трещины гидроразрыва.

Ряд работ, посвященных исследованию KGD-модели, сосредоточен на поиске автомодельных решений, допускаемых моделью при разнообразных предположениях (см., например, [72]).

1.2.2. Модель Перкинса–Керна–Нордгрена (РКН)

Перкинс и Керн в работе [3] предложили иную концепцию гидроразрыва, отличающуюся от предложенной в KGD-модели. Предполагается, что трещина гидроразрыва имеет постоянную высоту H , которая значительно меньше общей длины трещины $2L$, как показано на рис. 1.6. При таком допущении изменение параметров трещины вдоль ее длины мало и деформацию породы можно рассматривать в каждом вертикальном сечении $x = \text{const}$ изолированно, как плоское деформированное состояние. Тогда, предполагая постоянство избыточного давления p_{net} внутри каждого вертикального сечения $x = \text{const}$ трещины, получим эллиптический профиль раскрытия трещины в этом сечении [79]

$$W(z) = \frac{4}{E'} p_{\text{net}} \sqrt{\frac{H^2}{4} - z^2}. \quad (1.21)$$

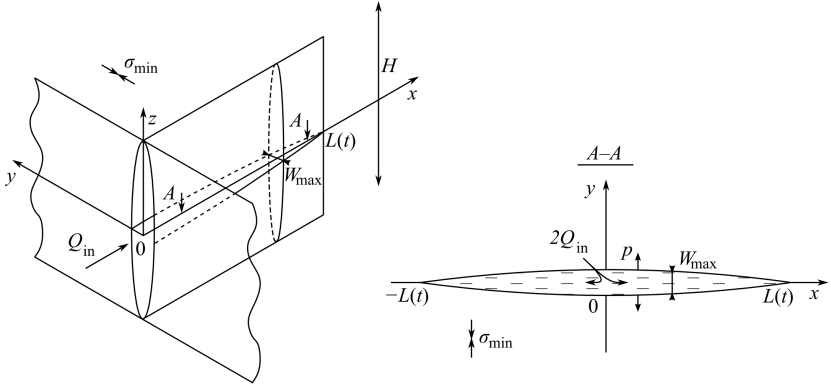


Рис. 1.6. Геометрическая концепция PKN-модели: в вертикальных плоскостях $x = \text{const}$, перпендикулярных к плоскости трещины, в условиях плоской деформации сечения трещины принимают эллиптическую форму.

В силу указанного предположения для каждого сечения выполняется соотношение (1.21), из которого следует следующая связь между максимальным раскрытием трещины W_{\max} и избыточным давлением p_{net} в сечении $x = \text{const}$:

$$W_{\max}(x) = \frac{2H}{E'} p_{\text{net}}(x). \quad (1.22)$$

Кроме того, решение задачи о стационарном течении ньютоновской жидкости в цилиндрической трубе с эллиптическим сечением, имеющим оси H и W_{\max} , дает соотношение [68]

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{64\mu}{\pi} \left(\frac{1}{W_{\max} H^3} + \frac{1}{W_{\max}^3 H} \right) Q_{\text{in}}, \quad (1.23)$$

где Q_{in} — не зависящий от времени расход жидкости через поперечное сечение трубы. В силу малости ширины W_{\max} по сравнению с H первое слагаемое в скобках (1.23) отбрасывается:

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{64\mu}{\pi W_{\max}^3 H} Q_{\text{in}}, \quad (1.24)$$

и полученное уравнение (1.24) вместе с (1.22) образуют модель Перкинса–Керна [3].

Подстановка W_{\max} из (1.22) в (1.24) дает в случае отсутствия зависимости от времени обыкновенное дифференциальное уравнение

$$p_{\text{net}}^3 \frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{8\mu Q_{\text{in}}(E')^3}{\pi H^4}. \quad (1.25)$$

К уравнению (1.25) добавляется граничное условие на кончике крыла трещины L

$$p_{\text{net}}(L) = 0, \quad (1.26)$$

которое, согласно (1.22), определяет смыкание берегов трещины в кончике. Интегрирование (1.25) от кончика трещины к скважине дает зависимость избыточного давления от координаты x

$$p_{\text{net}}(x) = \frac{2}{H} \left[\frac{2\mu Q_{\text{in}}(E')^3}{\pi} (L - x) \right]^{1/4}. \quad (1.27)$$

Из (1.22) с учетом (1.27) следует зависимость максимальной ширины эллиптического сечения трещины от расстояния до скважины

$$W_{\max}(x) = 4 \left[\frac{2\mu Q_{\text{in}}}{\pi E'} (L - x) \right]^{1/4}. \quad (1.28)$$

Таким образом, в модели Перкинса и Керна форма профиля раскрытия трещины не зависит от времени и весь процесс гидроразрыва является равновесным.

Недостатками модели Перкинса и Керна [3] являются отсутствие в ней учета утечек жидкости в породу через стенки трещины, невозможность описывать изменение объема трещины и определять ее длину. Они были исключены Нордгреном [4], который добавил к уравнениям Перкинса и Керна нестационарное уравнение неразрывности течения несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \tilde{Q}_L = 0, \quad (1.29)$$

где A — площадь поперечного сечения трещины $x = \text{const}$

$$A = \frac{1}{4} \pi H W_{\max}. \quad (1.30)$$

Здесь Q — объемный расход жидкости через это сечение, \tilde{Q}_L — объемный расход жидкости в породе на единицу длины трещины. Последний подчиняется закону Картера (1.10)

$$\tilde{Q}_L = HQ_L. \quad (1.31)$$

Отметим, что рассмотрение случая с нулевыми утечками не превращает РКН-модель в модель Перкинса–Керна, так как расход жидкости вдоль длины трещины варьируется из-за присутствия в уравнении (1.29) слагаемого $\partial A/\partial t$. Уравнение количества движения в РКН-модели следует из (1.24) заменой в нем постоянного расхода Q_{in} на локальный $Q(x, t)$:

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{64\mu}{\pi W_{\text{max}}^3 H} Q. \quad (1.32)$$

Таким образом, в нестационарную РКН-модель входят уравнения неразрывности (1.29) и количества движения (1.32) для жидкости, а также упругое соотношение между максимальной шириной трещины W_{max} в сечении $x = \text{const}$ и избыточным давлением в этом же сечении p_{net} (1.22). Подстановка выражения для p_{net} из (1.22) в уравнение (1.32) дает связь между локальным расходом Q и максимальной шириной W_{max} :

$$Q = -\frac{\pi E'}{512\mu} \frac{\partial W_{\text{max}}^4}{\partial x}. \quad (1.33)$$

Заменяя A и Q в (1.29) выражениями (1.30) и (1.33) соответственно, получим дифференциальное уравнение для W_{max} :

$$\frac{\partial W_{\text{max}}}{\partial t} - \frac{E'}{128\mu H} \frac{\partial^2 W_{\text{max}}^4}{\partial x^2} + \frac{4}{\pi} Q_L = 0. \quad (1.34)$$

Для замыкания уравнения (1.34) для крыла трещины задаются начальные данные

$$W_{\text{max}}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L' \quad (1.35)$$

и краевые условия

$$-\frac{\pi E'}{512\mu} \frac{\partial W_{\text{max}}^4}{\partial x} \Big|_{x=0} = Q_{\text{in}}, \quad W_{\text{max}} \Big|_{x=L'} = 0. \quad (1.36)$$

В (1.35) и (1.36) величина $L' > L(t)$ является правой границей области моделирования процесса гидроразрыва.

Следует обратить внимание, что система (1.34)–(1.36) замкнута. Длина трещины $L(t)$ в ней заменена правой границей области моделирования $L'(t)$, и уравнение для ее определения отсутствует. Заметим, что уравнение (1.34) имеет параболический тип и, следовательно, влияние граничных условий должно распространяться на всю область решения. Следовательно, положение правой границы должно влиять на решение. Однако, возмущения от нее очень быстро затухают. Поэтому длина $L(t)$ определяется в процессе решения как минимальная координата, в которой достигается нулевая ширина $W_{\max}(L) = 0$, т. е. расстояние, на котором эти возмущения заметны. Между кончиком трещины $L(t)$ и точкой L' считается, что трещина остается закрытой:

$$W(x, t) = 0, \quad L(t) \leq x \leq L'. \quad (1.37)$$

Благодаря усовершенствованию Нордгрена РКН-модель дала зависимости длины трещины L , ширины трещины W_{\max} и давления p_{net} на скважине от времени развития трещины. В общем случае эти зависимости могут быть получены численно. Если же рассматривать предельные случаи, то можно найти указанные зависимости в явном виде. Для случая больших утечек или больших времен развития гидроразрыва в [4] выведены формулы

$$L(t) = \frac{2Q_{\text{in}}}{\pi C_L H} t^{1/2}, \quad (1.38)$$

$$W_{\max}(0, t) = 8 \left[\frac{\mu Q_{\text{in}}^2}{\pi^3 E' C_L H} \right]^{1/4} \cdot t^{1/8}, \quad (1.39)$$

$$p_{\text{net}}(0, t) = 4 \left[\frac{(E')^3 \mu Q_{\text{in}}^2}{\pi^3 C_L H^5} \right]^{1/4} \cdot t^{1/8}. \quad (1.40)$$

При отсутствии утечки или маленьких временах развития там же получены другие зависимости

$$L(t) = 0.68 \left[\frac{4E'Q_{\text{in}}^3}{\mu H^4} \right]^{1/5} \cdot t^{4/5}, \quad (1.41)$$

$$W_{\max}(0, t) = 2.5 \left[\frac{8\mu Q_{\text{in}}^2}{E'H} \right]^{1/5} \cdot t^{1/5}, \quad (1.42)$$

$$p_{\text{net}}(0, t) = 2.5 \left[\frac{(E')^4 Q_{\text{in}}^2}{4H^6} \right]^{1/5} \cdot t^{1/5}. \quad (1.43)$$

Показано, что величина утечки жидкости гидроразрыва в породе определяет в целом поведение трещины гидроразрыва.

Несмотря на то что обе модели PKN и KGD являются одномерными, обратим внимание на существенное различие, которое позволяет разделять PKN- и KGD-подобные модели между собой. В PKN-модели связь раскрытия трещины и давления локальна — раскрытие в каждой точке трещины зависит только от давления в этой же точке (1.22). Это позволяет свести систему уравнений модели к одному дифференциальному уравнению или системе уравнений. В KGD-, как и в радиальной модели, которая будет описана ниже, эта связь глобальна — раскрытие трещины в каждой точке зависит от распределения давления вдоль всей трещины (1.2). Это приводит к появлению связанных интегродифференциальных уравнений, которые решаются итерационными методами или в частных случаях аналитически [70, 73].

В PKN-модели трещиностойкость породы не учитывается. Всегда считается, что жидкость гидроразрыва заполняет всю трещину вплоть до кончика. В кончике трещины не возникает сингулярных напряжений. Таким образом, в модели PKN механика кончика трещины не учитывается.

Учет псевдопластической реологии в модели PKN (аналогично модели KGD (1.20)) оказался весьма сложен [80] и не получил распространения.

1.2.3. Гибридная PKN–KGD-модель с фильтрационными утечками жидкости в породе

Одним из важных направлений совершенствования моделей гидроразрыва является уточнение расчета потерь жидкости в породе, так как именно этот процесс определяет объем трещины. Одномерные, простые модели наиболее подходят для разработки новых подходов к описанию этого процесса.

В [53, 54] рассмотрена одномерная модель гидроразрыва, в которой предложена подмодель потерь жидкости, основанная на описании фильтрации жидкости в породе в поршневом приближении. В качестве базовой модели взята модель с локальной связью раскрытия трещины с давлением (как в PKN-модели) (1.22), в которой для описания движения жидкости между двумя пластинами используются уравнение количества движения (1.8) и уравнение неразрывности (1.9) (как в KGD-модели).

Для этого в [53, 54] проинтегрировано соотношение (1.21) по z от $-H/2$ до $H/2$ и получено равенство между площадью поперечного эллиптического сечения A и избыточным давлением в сечении p_{net}

$$A = \frac{\pi p_{\text{net}} H^2}{2E'}. \quad (1.44)$$

Далее введено среднее раскрытие трещины

$$W = \frac{A}{H} \quad (1.45)$$

и получена связь между избыточным давлением p_{net} и средней шириной

$$W = \frac{\pi H}{2E'} p_{\text{net}}. \quad (1.46)$$

Видим, что используется не максимальное раскрытие W_{max} трещины, а осредненное по высоте раскрытие W :

$$W = W_{\text{max}} \frac{\pi}{4}. \quad (1.47)$$

Затем, считая вертикальное поперечное сечение трещины прямоугольным с шириной W и высотой H , использовали уравнения движения жидкости, полученные для KGD-модели: уравнение неразрывности (1.9) и уравнение количества движения (1.8), характерные для течений между параллельными разнесенными на расстояние W поверхностями.

Здесь мы, не касаясь вопроса о физической обоснованности такой гибридной модели, обратим внимание на усложнения, используемые в ней. Главным образом на одномерное моделирование величины утечек жидкости гидроразрыва в породе.

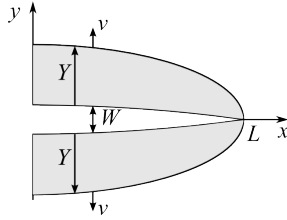


Рис. 1.7. Зона проникновения жидкости гидроразрыва в породе (обозначена серым).

Закон Картера утечки жидкости (1.10) заменен поршневым механизмом проникновения жидкости гидроразрыва в породе. Считается, что порода в окрестности трещины пропитывается жидкостью гидроразрыва на глубину Y , как изображено на рис. 1.7. Движение в зоне проникновения считается одномерным и описывается уравнениями

$$v_r = v_r(t), \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial y} = -\frac{\mu}{k}v_r, \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = v_r, \quad (1.50)$$

где v_r — скорость жидкости в породе по нормали к берегам трещины, p_r — избыточное давление жидкости гидроразрыва в породе, а k — проницаемость породы. Для замыкания уравнений (1.48), (1.49) и (1.50) на берегу трещины задается условие

$$p_r \Big|_{y=W/2} = p_{\text{net}}, \quad (1.51)$$

а на границе зоны проникновения полагается

$$p_r \Big|_{y=W/2+Y} = 0. \quad (1.52)$$

Из решения задачи (1.48)–(1.52) находится $v_r(t)$ и в (1.9) полагается $Q_L = 2v_r$. К уравнениям (1.8), (1.9) и (1.46) добавляются граничные условия (1.12) и (1.26).

Следует отметить, что эмпирический закон Картера является приближением для предложенного в [53, 54] поршневого механизма. Действительно, если пренебречь изменением давления в трещине во времени ($p_{\text{net}} = \text{const}$), то уравнение (1.49) с граничными условиями (1.51), (1.52) дает связь значения скорости фильтрации с избыточным давлением

$$v_r = \frac{p_{\text{net}} k}{\mu Y}. \quad (1.53)$$

Из (1.50), (1.53) и условия $Y(t_{\text{exp}}) = 0$ следуют выражения для глубины зоны проникновения

$$Y = \sqrt{\frac{2p_{\text{net}} k}{\mu} (t - t_{\text{exp}})} \quad (1.54)$$

и скорости потерь

$$v_r = \sqrt{\frac{2p_{\text{net}} k}{\mu}} \frac{1}{\sqrt{t - t_{\text{exp}}}}. \quad (1.55)$$

Последнее соответствует закону Картера (1.10) со значением эмпирического коэффициента

$$C_L = \sqrt{\frac{2p_{\text{net}} k}{\mu}}. \quad (1.56)$$

В [53, 54] найдены автомодельные решения поставленной задачи в случае малых и больших утечек жидкости гидроразрыва. В случае малых утечек решение задачи стремится к решению из РКН-модели. В случае больших утечек скорость роста трещины значительно уменьшается и также значительно уменьшается раскрытие трещины. Отметим, что в [55] модель усовершенствована путем учета псевдопластической реологии жидкости (1.20). Показано, что использование жидкости псевдопластической реологии в описанной в данном пункте модели позволяет ускорить распространение трещины гидроразрыва.

1.2.4. Гибридная PKN–KGD-модель с фильтрационными утечками жидкости гидроразрыва и наличием примеси пропантанта

Рассмотренная выше гибридная PKN–KGD-модель с фильтрацией жидкости в пласт в [56, 57] дополнена односкоростным приближением движения жидкости с частицами пропантанта, имеющими постоянную по всей длине трещины объемную концентрацию α , с целью определить влияние примеси частиц в жидкости гидроразрыва на динамику раскрытия трещины и ее конечную форму.

Считается, что вследствие просачивания жидкости гидроразрыва в пласт взвешенные частицы подходят к берегам трещины, коснувшись стенки, прилипают к ней, образуя слой пропантанта, как показано на рис. 1.8. Дополнительно к описанному в гибридной PKN–KGD-модели с фильтрационными утечками жидкости в породе величинам вводятся: скорость налипания частиц на стенку ω ; пористость породы β ; скорость жидкости гидроразрыва по нормали из трещины v . Из условия непрерывности потока частиц через границу смесь–слой прилипших частиц следует равенство

$$\alpha(v + \omega) = \omega, \quad (1.57)$$

дающее соотношение

$$\omega = \frac{\alpha}{1 - \alpha}v. \quad (1.58)$$

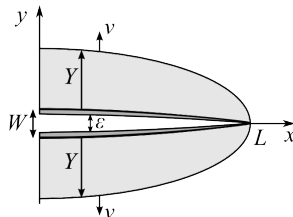


Рис. 1.8. Зона проникновения жидкости гидроразрыва в породу (обозначена светло-серым) и тонкий слой пропантанта, прилипшего к стенкам трещины (обозначен темно-серым).

Из условия непрерывности потока жидкости через слой прилипших частиц следует равенство

$$(1 - \alpha)(v + \omega) = \beta v_r, \quad (1.59)$$

дающее с учетом (1.58) соотношение

$$v_r = \frac{1}{\beta} v. \quad (1.60)$$

Уравнение неразрывности (1.9) с учетом осаждения частиц на стенки принимает вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Q_L = 0, \quad (1.61)$$

где ε — ширина трещины W за вычетом двух толщин прилипших к ее стенкам частиц, а величина утечки жидкости гидро-разрыва определяется по формуле

$$Q_L = 2(v + \omega). \quad (1.62)$$

Движение в зоне проникновения считается, как и в гибридной PKN-KGD-модели с фильтрационными утечками жидкости в породе (1.48)–(1.52). В силу граничных условий (1.51) и (1.52) из (1.49) находится уравнение

$$v_r = \frac{kp_{\text{net}}}{\mu Y}, \quad (1.63)$$

которое с учетом (1.50) преобразуется к виду

$$\frac{\partial Y^2}{\partial t} = \frac{2kp_{\text{net}}}{\mu}. \quad (1.64)$$

Еще одно уравнение следует из определения ω :

$$2\omega = \frac{\partial}{\partial t}(W - \varepsilon). \quad (1.65)$$

Из (1.58), (1.60) и (1.50) можно найти

$$2\omega = \frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha} \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad (1.66)$$

подставить в (1.65) и, проинтегрировав полученное уравнение с учетом начальных условий при $t = 0$

$$W = \varepsilon = Y = 0, \quad (1.67)$$

получить соотношение

$$\varepsilon = W - \frac{2\alpha\beta}{1-\alpha}Y. \quad (1.68)$$

Затем, исключая v и ω из (1.62), также получим выражение для утечки

$$Q_L = \frac{2\beta k p_{\text{net}}}{(1-\alpha)\mu Y}. \quad (1.69)$$

Окончательно модель работы [56] состоит из уравнений (1.8), (1.61), (1.63), (1.68), (1.69) и граничных условий на входе в крыло трещины (1.12) и на кончике трещины

$$W \Big|_{x=L(t)} = 0. \quad (1.70)$$

В [56] также были найдены автомодельные решения задачи. Показано, что присутствие частиц в жидкости гидроразрыва замедляет рост трещины. Величина объемного содержания частиц в закачиваемой смеси существенно влияет на время заполнения трещины и менее существенно – на ее конечную форму. В [57] был рассмотрен режим распространения трещины гидроразрыва с заданным давлением нагнетания

$$p_{\text{net}} \Big|_{x=0} = p_{\text{in}}. \quad (1.71)$$

Оказалось, что такое условие ограничивает рост трещины. Раскрытая трещина целиком заполняется пропантом, начиная с ее кончика.

1.2.5. Гибридная PKN–KGD-модель с фильтрационными утечками жидкости гидроразрыва, расширенная уравнением пьезопроводности в области вне трещины и уравнением переноса пропанта в трещине

В [58] гибридная PKN–KGD-модель с фильтрационными утечками жидкости гидроразрыва в породе улучшена путем заме-

ны поршневого механизма учетом изменения пластового давления жидкости при ее вытеснении жидкостью гидроразрыва в породе. Проникновение считается одномерным и квазистационарным, а движение в удаленной части пласта описывается уравнением упругого режима фильтрации. Модель проникновения состоит из уравнения неразрывности (1.50) для течения в зоне проникновения и уравнения движения в слое проникновения (1.49). На поверхности трещины используется граничное условие (1.51), а на фронте проникновения жидкости гидроразрыва в породе следующее условие:

$$p_r \Big|_{y=W/2+Y} = p_Y. \quad (1.72)$$

Здесь давление на фронте проникновения p_Y определяется интегральным соотношением, связанным с интенсивностью утечки v_r :

$$p_Y(x, t) = p^0 + \frac{\mu}{2\pi k} \int_0^t \int_{-L(\tau)}^{L(\tau)} \frac{v_r(\xi, \tau)}{t - \tau} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4\alpha(t - \tau)}\right) d\xi d\tau, \quad (1.73)$$

где p^0 — пластовое давление, α — коэффициент пьезопроводности пласта. Интегральное соотношение (1.73) получается из решения уравнения пьезопроводности для плоской трещины в предположении, что зона проникновения толщиной Y (см. рис. 1.7) достаточно мала. Уравнение пьезопроводности получается из уравнений фильтрации жидкости, подчиняющихся закону Дарси при постоянных проницаемости породы и вязкости жидкости [69].

Кроме этого в модель добавлена односкоростная модель переноса пропантанта в трещине, состоящая из одномерного уравнения неразрывности для объемной концентрации взвешенных частиц α

$$\frac{\partial A\alpha}{\partial t} + \frac{\partial Q\alpha}{\partial x} = 0, \quad (1.74)$$

где A , так же как и в (1.29), — площадь поперечного сечения трещины, а Q — объемный расход жидкости через это сечение. Закачка пропантанта началась спустя некоторое время после

начала гидроразрыва. Считалось, что трещина закрепилась, если концентрация пропанта в трещине достигала некоторого предельного значения α^* .

При постоянном расходе (1.12) трещина не закрепляется, так как интенсивность утечек со временем падает и начинает расти давление в трещине, а следовательно, и ее раскрытие. В результате процесс увеличения концентрации пропанта резко замедляется [58].

1.2.6. Одномерная модель развития трещины в пороупругой среде

Совершенствование моделей гидроразрыва в части уточнения расчета потерь жидкости в породе происходит и путем численного решения уравнений пороупругости вместо использования эмпирических законов утечки. Это направление развития моделей развивается в работах [81–83].

Для классической модели KGD в работе [81] был предложен численный алгоритм на основе метода конечных элементов для случая, когда энергия вязкой диссипации жидкости в трещине намного больше потерь энергии при разрушении горной породы. Отличительной особенностью предложенного подхода является то, что в процессе решения не требуется явно отслеживать положение вершины трещины и последовательно наращивать ее длину на каждом шаге по времени. Это позволяет отказаться от использования итерационных методов для нахождения совместного решения уравнений течения жидкости в трещине, упругой реакции стенок трещины и продвижения ее вершины.

В более поздних работах [82, 83] концепция расчета трещин ГРП без явного отслеживания фронта трещины была реализована для моделирования трещины в пороупругой среде, состоящей из упругого пористого скелета и поровой жидкости. В наиболее простом случае данная среда описывается уравнениями Био

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i &= 0, \quad \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \alpha \delta_{ij} p_{\text{pore}}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$S_\varepsilon \frac{\partial p_{\text{pore}}}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{k_{\text{res}}}{\mu_{\text{pore}}} \nabla p_{\text{pore}} - \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right). \quad (1.76)$$

где u_i — компоненты вектора смещений \mathbf{u} , σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, ε_{ij} — компоненты тензора деформаций, f_i — компоненты вектора массовых сил, λ и μ — параметры Ламэ, α — коэффициент Био, p_{pore} — давление жидкости в порах, S_ε — коэффициент упругоёмкости, k_{res} — проницаемость пласта; μ_{pore} — коэффициент динамической вязкости поровой жидкости.

Данная модель отличается от уравнений упругого равновесия (подробнее о них см. в главе 2) наличием члена $\alpha \delta_{ij} p_{\text{pore}}$, который позволяет учитывать влияние порового давления на напряженно-деформированное состояние пласта вблизи трещины. При этом утечки в пласт вычисляются из уравнения фильтрации (1.76) без использования предположений, заложенных в моделях утечек типа Картера. Кроме более аккуратного расчета объема утечек использование уравнений Био позволяет избавиться от сингулярности давления вблизи вершины трещины, свойственной модели KGD и ее обобщениям, предполагающим отсутствие отставания фронта жидкости от фронта трещины.

В работе [84] с использованием модели Био методом конечных элементов была решена задача о закрытии трещины фиксированной длины. В основе численного алгоритма лежала единая слабая формулировка задачи, связывающая двумерные уравнения равновесия (1.75) и фильтрации (1.76) в пласте с одномерным уравнением для течения жидкости по трещине. Корректность такой формулировки показана в работе [85], где проводилось сравнение численного конечноэлементного решения и построенного точного решения для стационарной полубесконечной трещины в пороупругой среде. В результате моделирования показано, что асимметрия и размеры крыльев трещины существенно влияют на кривые падения давления на забое скважины.

В работах [82, 83] численный алгоритм из [84] был обобщен на случай распространяющихся трещин. В [83] показано влияние учета пороупругости на распространение трещины и ее размеры. В частности, длина трещины, рассчитанная при уче-

те влияния порового давления на деформацию породы и обратного влияния деформации на фильтрацию жидкости, может оказаться в два раза меньше, чем длина трещины, рассчитанная без учета их взаимного влияния. Применение построенной численной модели трещины ГРП для слоистой среды с различной проницаемостью [82] показало, что неоднородность среды способна существенно влиять как на направление распространения трещины, так и на форму профиля ее раскрытия.

В работе [86] показано, что в случае нестационарной закачки или откачки жидкости из трещины ГРП наблюдается фазовый сдвиг между волнами давления и расхода жидкости. Этот сдвиг обусловлен разностью проницаемостей трещины и окружающего порового пространства. На основе аналитического решения и численных экспериментов показана зависимость фазового сдвига от физических параметров задачи, в частности, от длины трещины. Наличие такой зависимости дает возможность разработки методики косвенного определения параметров трещины после ее образования.

1.2.7. Модель радиальной трещины

Модель радиальной трещины относится ко второй группе одномерных моделей, описывающих радиальное симметричное распространение из точечного источника. Эта модель анализируется в работах [2, 3, 5, 62, 75, 87, 88]. Геометрическая концепция модели представлена на рис. 1.9.

Деформация породы под действием осесимметричного распределения давления в трещине выражается интегральным соотношением (см. подробнее [89])

$$W(r) = \frac{8}{\pi E'} \int_r^R \left(\int_0^\zeta \frac{p_{\text{net}}(\xi)\xi}{\sqrt{\zeta^2 - \xi^2} \sqrt{\zeta^2 - r^2}} d\xi \right) d\zeta, \quad (1.77)$$

где $R = R(t)$ — положение кончика трещины. Положение кончика крыла трещины определяется из известного критерия хрупкого распространения трещины [62] (о теории хрупкого распространения трещин см. подробнее [63])

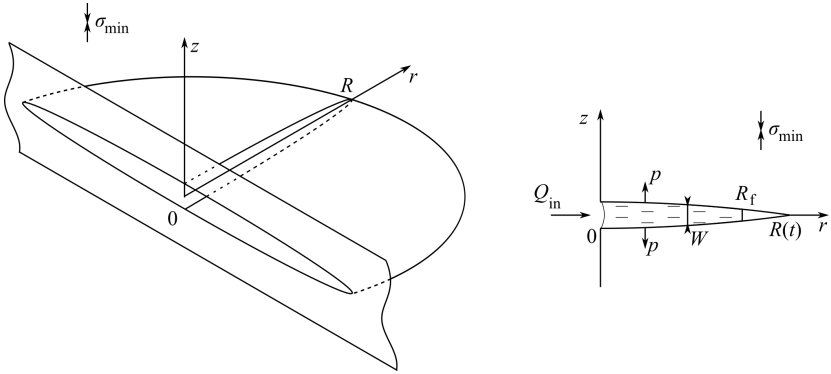


Рис. 1.9. Геометрическая концепция радиальной модели.

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi R}} \int_0^R \frac{p_{\text{net}}(\xi)\xi}{\sqrt{R^2 - \xi^2}} d\xi = K_{Ic}. \quad (1.78)$$

Отметим, что в работах [2, 3, 5, 75, 87] полагалось отсутствие трещиностойкости породы.

К уравнениям, описывающим движение жидкости в трещине, относятся уравнение неразрывности

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rWu)}{\partial r} + Q_L(r, t) = 0 \quad (1.79)$$

и уравнение количества движения

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial r} = -\frac{12\mu}{W^2}u. \quad (1.80)$$

Утечка жидкости в породу Q_L описывается законом Картера (1.10) с учетом замены x на r .

Уравнения движения жидкости (1.79) и (1.80) дополняются краевым условием в предельной форме на скважине

$$2\pi \lim_{r \rightarrow 0} (rWu) = Q_{\text{in}}. \quad (1.81)$$

Предполагается наличие отставания фронта жидкости R_f от кончика трещины R

$$R - R_f > 0. \quad (1.82)$$

Положение фронта жидкости в трещине R_f определяется из соотношения

$$Q(R_f, t) = 0, \quad (1.83)$$

а краевое условие для (1.79) и (1.80) на фронте жидкости R_f принимает вид

$$p_{\text{net}}(R_f, t) = -\sigma_{\text{min}}. \quad (1.84)$$

Заметим, что давление p_{net} на участке от фронта жидкости до кончика трещины также полагается равным $-\sigma_{\text{min}}$. Из (1.81) и (1.83), используя уравнение (1.79), можно получить уравнение баланса жидкости

$$Q_{\text{in}}t = 2\pi \int_0^{R_f(t)} rW(r, t)dr + 2\pi \int_0^t \int_0^{R_f(\tau)} rQ_L(r, \tau)drd\tau. \quad (1.85)$$

Для замыкания поставленной задачи задаются начальные данные

$$\begin{aligned} R(0) &= R_0, & R_f(0) &= R_0, \\ W(x, 0) &= W_0, & 0 \leq r \leq R_0. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Обобщенная радиальная модель с отставанием фронта жидкости от кончика трещины описывается интегральным соотношением (1.77), условием (1.78), уравнениями (1.79) и (1.80), тремя краевыми условиями (1.81), (1.83) и (1.84) и начальными данными (1.86). Обобщенная радиальная модель без отставания фронта жидкости от кончика трещины строится аналогично как и KGD-модель.

В работах [2, 3] показано, что в отсутствие утечки (1.10) весь процесс гидроразрыва является равновесным. В [5, 75, 87] показано, что величина утечки жидкости гидроразрыва в породе определяет в целом поведение радиальной трещины гидроразрыва.

Аналогично (1.20) модели KGD производится учет псевдопластической реологии жидкости [62]. Тогда уравнение (1.80) принимает вид

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial r} = -\frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n} \frac{\mu}{W^{2n+1}} Q^n. \quad (1.87)$$

В [62] указано, что параметр n главным образом влияет на скорость распространения трещины гидроразрыва.

1.3. Двумерные модели

Геометрическая концепция этих моделей развивает геометрическую концепцию, предложенную в KGD-модели. В двумерных моделях допускается криволинейность горизонтального сечения трещины, распространяющейся от скважины в направлении поперек действия минимальных напряжений залегания, как показано на рис. 1.10. Геометрия горизонтальных сечений и процессы в них не зависят от высоты. В такой концепции упругость можно рассматривать как плоское деформированное состояние породы. Однако ввиду произвола геометрии задачи, нельзя получить формул, аналогичных (1.2). Поэтому в таких моделях решение задачи упругости возможно получить лишь численно, решая уравнения равновесия Ламэ с участком границы, представляемым криволинейным разрезом.

Главное преимущество двумерных моделей над одномерными состоит в возможности описания эффектов гидроразрыва, связанных с искривлением траектории трещины в прискважинной области. В двумерных моделях, как правило, учитывается наличие полости скважины. Рассмотрение в модели гидроразрыва по крайней мере двух ее крыльев, выходящих из скважины, обусловлено тем, что максимальное раскрытие трещины гидроразрыва в реальных условиях наблюдается в окрестности скважины. При наличии только одного крыла максимальное раскрытие трещины реалистично бы находилось в середине этого крыла. Кроме того, предполагается, что крылья трещины

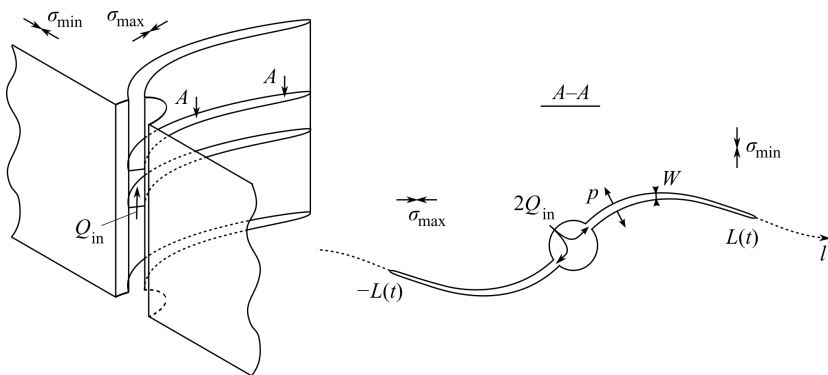


Рис. 1.10. Геометрическая концепция двумерных моделей.

симметричны относительно оси скважины. Поэтому рассматривается только часть исследуемой области, что значительно сокращает требующиеся вычислительные ресурсы.

В таких моделях [24, 90–92] используется подмодель распространения трещины нормального отрыва, т. е. в кончике трещины при распространении выполняются одновременно следующие критерии (см. подробно [63]):

$$K_I(L) = K_{Ic}, \quad (1.88)$$

$$K_{II}(L) = 0, \quad (1.89)$$

где K_I и K_{II} – коэффициенты интенсивности напряжений. Вторым критерий (1.89) обуславливает выбор направления распространения трещины гидроразрыва. Критерии (1.88) и (1.89) определяют положение кончика трещины L в пространстве. Отметим также работу [23], в которой рассматривается выход трещины гидроразрыва на магистральное направление распространения поперек действия минимальных напряжений по заданной гладкой кривой с учетом только критерия (1.88). Заметим, что величины K_I и K_{II} могут быть определены лишь численно по уже определенному напряженному состоянию около кончика трещины L .

Уравнения движения жидкости гидроразрыва берутся из модели KGD (1.8) и (1.9) с учетом замены координаты x на криволинейную координату l вдоль крыла трещины. Утечка жидкости гидроразрыва представляется законом Картера (1.10). На границе раздела сред жидкость–порода задаются условия сшивки, т. е. берега трещины нагружаются давлением, а нормальное раскрытие трещины определяет ее ширину.

Начальная конфигурация в момент времени $t = 0$ теперь дополнительно определяется углом перфорирования β по отношению к напряжениям залегания σ_{\min} и σ_{\max} .

Двумерная постановка уже обладает значительной вычислительной сложностью, и первые работы [90–92] не учитывали течение жидкости в трещине гидроразрыва. Давление, создаваемое жидкостью, либо считалось постоянным (случай невязкой жидкости), либо аппроксимировалось заданным профилем вдоль трещины гидроразрыва. В [24] этот недостаток был устранен, и течение ньютоновской жидкости в полости и трещине было учтено в предложенной в этой работе модели.

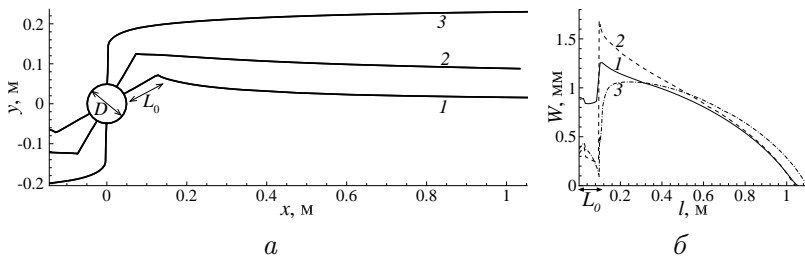


Рис. 1.11. Траектории трещины при различных углах перфорирования (а) и ширина трещины вдоль ее крыла (б). 1 – $\beta = 30^\circ$; 2 – $\beta = 60^\circ$; 3 – $\beta = 89^\circ$.

Существенным результатами, полученными при помощи двумерных моделей, являются: траектория трещины определяется в основном углом перфорирования β и соотношением между максимальным σ_{\max} и минимальным σ_{\min} напряжениями залегания [24, 90–92]; неверный угол перфорирования приводит к пережатию трещины около скважины [23, 24, 92], как показано на рис. 1.11.

1.4. Псевдотрехмерные модели

В данных моделях трещина считается плоской и ориентированной перпендикулярно минимальным напряжениям залегания σ_{\min} , как показано на рис. 1.12. Отличие этих моделей от одномерных моделей заключается в одновременном нахождении горизонтального бокового от скважины и вертикального роста трещины, т. е. на каждом шаге по времени определяется фронт трещины, а не положение ее кончика. В отличие от дву-

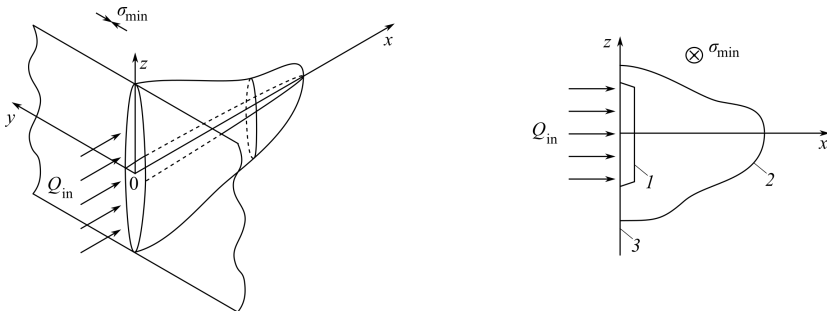


Рис. 1.12. Геометрическая концепция псевдотрехмерных моделей: 1 – перфорация, 2 – фронт трещины, 3 – скважина.

мерных моделей рассматривается плоская трещина и пренебрегается прискважинной областью. Трещина распространяется согласно критерию (1.88). В последнее время в таких моделях применяется модель упругости для слоистой вдоль вертикальной оси z породы [49], т. е. каждый p -й слой породы характеризуется своим модулем Юнга E^p и своим напряжением залегания σ_{\min}^p . Между упругими слоями задаются условия сцепки и считается, что процесс развития трещины остается однородным вдоль вертикальной оси z .

Течение жидкости моделируется в рамках одного из двух подходов. Первый подход [93] заключается в представлении течения жидкости как одномерного в каждом слое по высоте (z) трещины. Второй подход [8, 49, 94] заключается в описании течения жидкости двумерными уравнениями сохранения массы и количества движения. Утечка представляется законом Картера (1.10).

Отдельно следует выделить работы [95, 96], в которых рассматривается только три слоя породы: в верхнем и нижнем слое напряжения залегания $\sigma_{\min}^1 = \sigma_{\min}^3 > \sigma_{\min}^2$ больше напряжений залегания в центральном слое. Такая модель является прямым развитием РКН-модели.

Существенными результатами, полученными при помощи псевдотрехмерных моделей, являются: при изотропности породы трещина приобретает примерно эллиптическую форму; в случае слоистой породы трещина в основном распространяется вдоль по тем слоям p , у которых наименьшее значение модуля Юнга E^p и напряжение залегания σ_{\min}^p .

1.5. Трехмерные модели

Термин «трехмерная» означает, что модель не имеет каких-либо ограничений на геометрию трещины и направление ее распространения. Такая модель должна существенным образом соединять описание трехмерного течения жидкости внутри полости трещины с расчетом трехмерных полей напряженно-деформированного состояния породы и критериями роста и направления распространения фронта трещины. При этом на начальном этапе моделирования в полной трехмерной модели должна быть решена задача инициации зародышевой трещи-

ны, т. е. построения начальной трещины из известной геометрической конфигурации перфорированной скважины.

1.5.1. Модель инициации трещины гидроразрыва

К настоящему времени в печати имеются работы [28–40, 97–99], в которых рассматривается процесс инициации трещины гидроразрыва с целью определить давление инициации, месторасположение и ориентацию трехмерной зародышевой трещины. Эти данные особенно важны, поскольку они требуются как начальная конфигурация для трехмерного моделирования распространения трещины гидроразрыва. Во всех подходах моделируется трехмерное напряженно-деформированное состояние породы с полостью скважины и перфорациями, при этом и скважина, и перфорации представляются цилиндрическими полостями. Для моделирования напряженно-деформированного состояния породы в работе [98] применяется подход, основанный на модели двух невзаимодействующих цилиндрических полостей, в [99] — метод конечных элементов и в [28–40, 97] — метод граничных элементов. В качестве критерия разрушения используется критерий максимальных растягивающих напряжений:

$$\sigma_3 \geq \sigma_c, \quad (1.90)$$

где σ_c — прочность на разрыв породы.

В работе [99] моделирование предполагает симметрию задачи, рассматривая только восьмую часть всей породы, что значительно сокращает объем вычислений. Из-за этого фактически рассматривается следующая конфигурация: у скважины на одном уровне пробурены две разнонаправленные перфорации одинаковых габаритов. Отметим, что в таком подходе для корректного учета напряжений залегания требуется достаточно большая расчетная область (более чем двадцать характерных размеров рассматриваемой полости). Важными результатами анализа в [99] являются следующие выводы: перфорации не оказывают влияния друг на друга если они расположены по высоте на расстоянии более 6–8 диаметров перфорации; в целях снижения давления инициации необходимо направлять перфорации в сторону максимального возможного напряжения залегания.

В [97] был проведен анализ конфигурации с четырьмя разнонаправленными перфорациями. Показано, что трещина инициируется на стыке скважины и той перфорации, которая направлена в сторону максимального возможного напряжения залегания.

В [98] рассматриваются только сценарии инициации трещины гидроразрыва на стыке скважины и перфорации. В [98] проведен исчерпывающий анализ поведения давления инициации для разнообразного расположения скважины и перфорации относительно напряжений залегания σ_{\min} , σ_{\max} и σ_V . Также показано, что перфорация значительно сокращает давление инициации трещины.

В работах [31, 34] был проведен анализ всех возможных сценариев инициации трещины. Показано, что трещина может инициироваться от полости скважины, от стыка скважины и перфорации и от середины перфорации. Установлены условия реализации каждого из сценариев. Также в работе [31] учтено влияние стальной обсадной колонны, являющейся неотъемлемой частью технологического процесса. Показано, что наличие обсадной колонны существенно изменяет как давление инициации, так и сценарий инициации.

1.5.2. Модель распространения трещины гидроразрыва

Геометрическая концепция трехмерной модели распространения трещины гидроразрыва приведена на рис. 1.13. Модели, предложенные в [6–15], близки к данному определению, но в то же время имеют ряд существенных упрощений. Трещина в

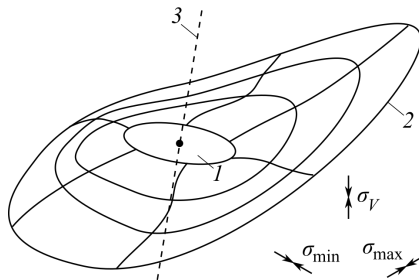


Рис. 1.13. Геометрическая концепция трехмерных моделей: 1 — зародышевая трещина, 2 — фронт трещины, 3 — скважина.

них рассматривается как поверхность разрыва в трехмерном пространстве. Течение жидкости вдоль поверхности разрыва описывается двумерными уравнениями, включающими упрощенное уравнение неразрывности. Фронт трещины рассматривается локально в условиях плоского напряжения. Течением жидкости в параллельном фронту трещины направлении пренебрегается. Простейшая модель Картера утечки жидкости используется для описания фильтрации жидкости через стенки трещины. Поверхность скважины исключена из рассмотрения в задаче расчета напряженно-деформированного состояния породы. Тем не менее затраты вычислительных ресурсов на решение такой сопряженной задачи оказываются чрезмерными, даже с использованием современной высокопроизводительной вычислительной техники [49].

В работах [17–19] строятся более совершенные «полностью» трехмерные модели распространения, в которых устранены основные упрощения, принятые в [6–15]. Отличительными особенностями разработанных в [17–19] моделей являются использование в них трехмерного критерия нахождения величины приращения фронта трещины на каждом шаге ее распространения и выбора направления распространения, учитывающего все три коэффициента интенсивности напряжений, а также одновременное рассмотрение скважины и переменной нагрузки, вызванной течением жидкости в распространяющейся от скважины трещине. К тому же в монографии модели [17–19] усовершенствуются путем замены в них ньютоновской модели жидкости моделью Гершеля–Балкли.

1.6. Области применимости моделей гидроразрыва пласта

В процессе гидроразрыва можно выделить три основных стадии, как показано на рис 1.14. На первой стадии инициируется зародышевая трещина гидроразрыва где-либо на перфорированном интервале скважины. На второй стадии в зависимости от ориентации зародышевой трещины и ее конфигурации она, искривляясь, выходит на направление своего магистрального развития, ориентированного поперек минимального напряжения залегания. И на последней стадии трещина распростра-

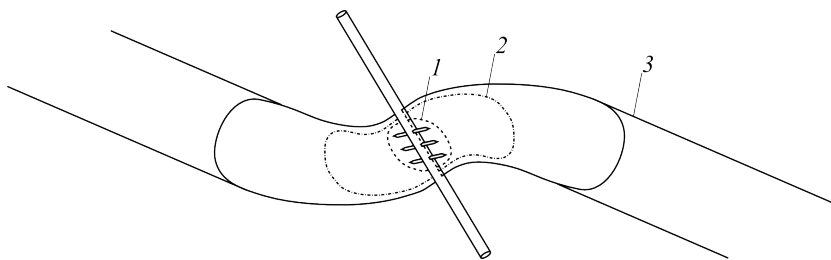


Рис. 1.14. Стадии гидроразрыва пласта: 1 — инициация трещины гидроразрыва, 2 — искривление трещины гидроразрыва в сторону направления магистрального распространения, 3 — рост трещины гидроразрыва в магистральном направлении.

няется вдоль указанного направления на большое расстояние. Одномерные модели хорошо описывают распространение трещины гидроразрыва на последней его стадии или в случае, когда перфорации направлены строго в магистральном направлении роста трещины. Однако эти модели совершенно не учитывают распространение трещины по высоте. Псевдотрехмерные модели в дополнение позволяют учесть распространение трещины гидроразрыва по вертикали. Двумерные и трехмерные модели описывают процесс гидроразрыва с учетом второй его стадии. Только «полностью» трехмерные модели, включающие и процесс инициации трещины, способны адекватно моделировать процесс на всех его стадиях. Отметим, что на сегодня наиболее близкими к таким моделям можно считать разработанные в данной монографии, хотя их реализация связана с высокой вычислительной трудоемкостью.

На уровне одномерных моделей исследовано влияние параметров скорости закачки, утечки, вязкости жидкости на процесс гидроразрыва. В целом полученные результаты актуальны для уже развитой трещины гидроразрыва. Двумерные и трехмерные модели учитывают искривление траектории и могут быть использованы при моделировании гидроразрыва начиная от известной конфигурации иницированной трещины. На их уровне исследовано влияние параметров неравномерности напряжений залегания, углов перфорирования относительно магистрального направления распространения трещины на траекторию и раскрытие трещины гидроразрыва.

Глава 2

Модель деформации среды в задачах о зарождении и распространении трещин

Модель деформации породы при моделировании распространения трещины позволяет рассчитывать ширину трещины по известному распределению давления в трещине и напряжениям породы в естественном залегании. Для расчета деформации породы решается задача упругого равновесия в бесконечной области, внутри которой находятся полость (скважина, перфорация) и трещина, как изображено на рис. 2.1.

Широко известными методами решения задач упругости являются: метод конечных разностей (МКР), конечных элементов (МКЭ) и граничных элементов (МГЭ). При решении внешних задач упругости МКР и МКЭ обладают существенным недостатком: требуют аппроксимации расчетной области большим количеством ячеек вдали от полостей и трещин. МГЭ свободен от этого недостатка, так как требует аппроксимации только границы области.

Суть классического МГЭ заключается в переходе от дифференциальных уравнений упругости к граничному интегральному уравнению смещений. При решении этого уравнения отыскиваются все неизвестные функции на границе области.

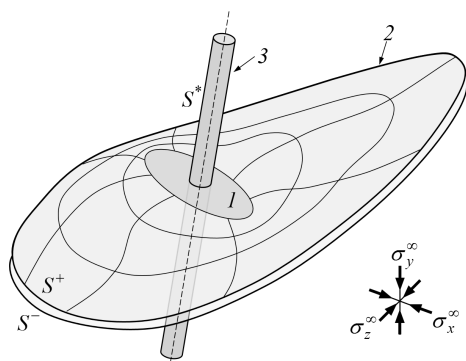


Рис. 2.1. Геометрическая концепция трехмерных моделей: 1 – зародышевая трещина; 2 – фронт трещины; 3 – полость с границей S^* ; S^\pm – верхний и нижний берега трещины.

Для нахождения неизвестных функций внутри области применяется фундаментальное интегральное соотношение для внутренней точки. Однако классический МГЭ не применим для задач с трещинами, потому что граничное интегральное уравнение смещений вырождается на берегах трещины.

Для преодоления указанной трудности в настоящей работе разработана модификация классического МГЭ – дуальный метод граничных элементов (ДМГЭ). Суть ДМГЭ состоит в замене граничного интегрального уравнения смещений на граничное интегральное уравнение напряжений на одном из берегов трещины. Это уравнение не включает в себя смещения на трещиноватой границе, но позволяет найти разрывы смещений на трещине. Интегральное уравнение напряжений содержит особенности более высокого порядка, а интегралы понимаются в смысле главного значения Адамара. Ввиду этого требуется создание численного метода для их эффективного вычисления.

Авторами настоящей монографии классический МГЭ применялся для решения задачи зарождения трещин гидроразрыва в окрестности перфорированной скважины [29–38]. Двумерный дуальный МГЭ применялся в задаче распространения трещин гидроразрыва от круглой полости [24]. В настоящей главе будут описаны основные варианты МГЭ, в том числе трехмерный вариант дуального МГЭ и его применение для решения трехмерных задач распространения трещины ГРП.

2.1. Постановка задачи упругого равновесия

2.1.1. Основные уравнения

Напряженное состояние изотропной однородной среды под действием внешних сил f_i описывается уравнениями упругого равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad (2.1)$$

в которых компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют линейному закону Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.2)$$

в случае малых деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.3)$$

В (2.2) u_i есть компоненты вектора смещений \mathbf{u} , λ и μ – параметры Ламэ, которые выражаются через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν как

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.4)$$

Введем также модуль плоского сдвига E' , связанный с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν как

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}. \quad (2.5)$$

Из (2.1) и (2.2) выводятся уравнения Навье–Ламэ упругого равновесия, записанные для смещений [100]

$$(\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} = 0. \quad (2.6)$$

2.1.2. Граничные условия

Внутренняя граница задачи S (см. рис. 2.1) состоит из поверхности полости S^* , верхней S^+ и нижней S^- границ трещины: $S = S^* + S^+ + S^-$. На полости S^* ставится граничное условие

$$t_i \equiv \sigma_{ij} n_j = -p_{\text{well}} n_i - \sigma_{ij}^{\infty} n_j, \quad (2.7)$$

где n_i – компоненты внешней единичной нормали к поверхности; p_{well} – давление в полости; σ_{ij}^{∞} – компоненты тензора, сжимающего материал на бесконечности и имеющего главные компоненты σ_x^{∞} , σ_y^{∞} и σ_z^{∞} . Компоненты σ_x^{∞} , σ_y^{∞} и σ_z^{∞} на бесконечности являются напряжениями залегания в нетронутом массиве породы.

На части границы S^{\pm} , соответствующей трещине, в задаче распространения трещины ставится граничное условие

$$t_i = -p_{\text{crack}} n_i - \sigma_{ij}^{\infty} n_j. \quad (2.8)$$

На бесконечности также добавляется условие

$$u_i(\infty) = 0. \quad (2.9)$$

Учет напряжений залегания в нетронутом массиве породы обеспечивается за счет добавок с тензором σ_{ij}^{∞} в граничных условиях (2.7) и (2.8). Решение задачи упругости дает напряженно-деформированное состояние относительно уже сжатой напряжениями σ_{ij}^{∞} породы, т. е. реальные напряжения, возникающие в породе, равны $\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{\infty}$.

2.2. Методы решения уравнений упругого равновесия модели деформации среды

2.2.1. Классический МГЭ

Используя теорию потенциалов, из уравнений упругого равновесия (2.6) можно получить следующее интегральное соотношение [101–103], которое будем называть фундаментальным

интегральным соотношением для смещений или тождеством Сомильяны:

$$u_i(\mathbf{x}^*) = \int_S U_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (2.10)$$

где $\mathbf{x}^* \in V$, $\mathbf{x} \in S$, V – упругая область задачи. Соотношение (2.10) связывает значение смещений внутри тела со значениями смещений и напряжений на его границах. Здесь ядра $U_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$ и $T_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$ – известное решение задачи Кельвина о действии точечной силы (см., например, [104, 105]). В задаче Кельвина определяются поля смещений $u_j^*(\mathbf{x})$ и напряжений $t_j^*(\mathbf{x})$ в упругом теле при действии единичной сосредоточенной в точке \mathbf{x}^* силы $f_i^*(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) e_i$:

$$\begin{aligned} u_j^*(\mathbf{x}) &= U_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) e_i, \\ t_j^*(\mathbf{x}) &= T_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) e_i. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Продифференцировав соотношение (2.10) по соответствующей координате и применив закон Гука (2.2), получим аналогичное фундаментальное соотношение для напряжений

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}^*) = \int_S D_{kij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) t_k(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \int_S S_{kij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (2.12)$$

где функции $D_{kij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$ и $S_{kij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$ получаются из $U_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$ и $T_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$ дифференцированием по соответствующей координате x_k и суммированием согласно (2.2) и (2.3).

Таким образом, в случае если компоненты смещений и напряжений на всей границе задачи S известны, используя интегральные соотношения (2.10) и (2.12) в любой точке внутри упругой области $\mathbf{x}^* \in V$ определяются компоненты смещений $u_i(\mathbf{x})$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$.

Устремляя $\mathbf{x}^* \rightarrow \mathbf{x}' \in S$ в (2.10), получим граничное интегральное уравнение смещений (ГИУС)

$$c_{ij}(\mathbf{x}') u_i(\mathbf{x}') = \int_S U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \quad (2.13)$$

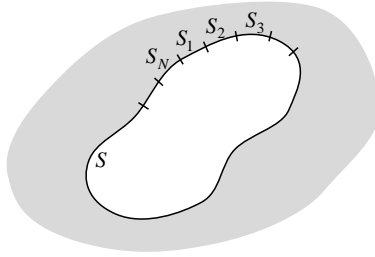


Рис. 2.2. Схема разбиения границы тела на элементы.

Здесь $c_{ij}(\mathbf{x}')$ — свободный член, который зависит от геометрии границы, на которой расположена точка \mathbf{x}' . В частности, для участка гладкой границы $c_{ij}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2}\delta_{ij}$. Символом \oint в (2.13) и далее обозначается главное значение сингулярного интеграла в смысле Коши.

Решая интегральное уравнение (2.13), определим компоненты смещений или напряжений на границе области S . Для этого вся граница S аппроксимируется N граничными элементами, как схематично изображено на рис. 2.2. Тогда интегралы в ГИ-УС заменяются на суммы интегралов по элементам S_n и преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 c_{ij}(\mathbf{x}')u_i(\mathbf{x}') &= \sum_{n=1}^N \int_{S_n} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \\
 &- \sum_{n=1}^N \oint_{S_n} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}). \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Декартовы координаты x_i , компоненты смещений u_i и компоненты напряжений t_i на элементе S_n аппроксимируются с помощью интерполяционных форм-функций $\phi_m(\xi_1, \xi_2)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x_i(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{m=1}^M x_i^m \phi_m(\xi_1, \xi_2), \\
 u_i(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{m=1}^M u_i^m \phi_m(\xi_1, \xi_2),
 \end{aligned}$$

$$t_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^M t_i^m \phi_m(\xi_1, \xi_2). \quad (2.15)$$

Здесь x_i^m – координаты опорных точек элемента, u_i^m – компоненты смещений, t_i^m – компоненты напряжений в этих точках и M – количество опорных точек. Граничные элементы, основанные на таком представлении, получили название изопараметрических [106]. Локальные координаты ξ_1, ξ_2 соответствуют трехмерной задаче, для двумерной задачи используется только одна локальная координата ξ_1 .

С учетом (2.15) соотношение (2.14) принимает вид

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{x}') u_i(\mathbf{x}') &= \sum_{n=1}^N \int_{S_n} \sum_{m=1}^M U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) t_j^m \phi_m(\xi_1, \xi_2) dS_n - \\ &- \sum_{n=1}^N \int_{S_n} \sum_{m=1}^M T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) u_j^m \phi_m(\xi_1, \xi_2) dS_n, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$dS_n = |J^n(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2, \quad (2.17)$$

а $|J^n(\xi_1, \xi_2)|$ – якобиан перехода в локальную систему координат, связанную с элементом S_n . Уравнение (2.16) теперь можно переписать в следующем виде:

$$c_{ij}(\mathbf{x}') u_i(\mathbf{x}') = \sum_{n=1}^N U_{ij}^{nm} t_j^{nm} - \sum_{n=1}^N T_{ij}^{nm} u_j^{nm}, \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} U_{ij}^{nm} &= \iint_{S_n} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) \phi_m(\xi_1, \xi_2) |J^n(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2, \\ T_{ij}^{nm} &= \iint_{S_n} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) \phi_m(\xi_1, \xi_2) |J^n(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

есть коэффициенты, определяемые исключительно аппроксимацией и геометрией границы. Рассматривая (2.18) в опорных

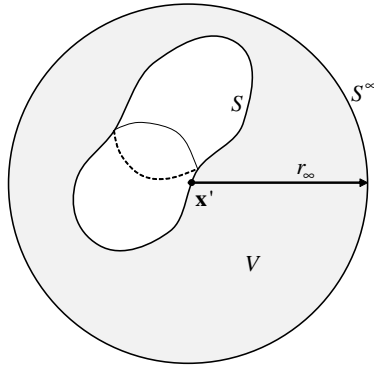


Рис. 2.3. Схема задачи: бесконечная область с полостью S .

точках каждого из элементов, получим систему уравнений. После подсчета всех величин U_{ij}^{nm} , T_{ij}^{nm} , перенося все неизвестные в вектор неизвестных, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для всех неизвестных компонент смещений или напряжений в опорных точках элементов. Используя формулы (2.15), определим компоненты смещений и напряжений в любой точке поверхности S .

Классический МГЭ и условие на бесконечности

Одной из важнейших особенностей классического МГЭ является автоматическое удовлетворение условий на бесконечности (2.9), что позволяет избежать аппроксимации удаленной границы. Чтобы показать эту особенность, рассмотрим полость S в бесконечном объеме V , как показано на рис. 2.3. Обозначим через r_∞ радиус сферы S^∞ с центром в точке \mathbf{x}' . Тогда интегральное уравнение смещений, на котором основан классический МГЭ, запишется в виде

$$\begin{aligned}
 & c_{ij}(\mathbf{x}')u_i(\mathbf{x}') + \\
 & + \int_S T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_S U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) = \\
 & = \int_{S^\infty} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{S^\infty} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}). \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

При $r_\infty \rightarrow \infty$ имеем следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) &= O(r_\infty^{-1}), \\ T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) &= O(r_\infty^{-2}), \\ dS &= |J| d\phi d\theta = O(r_\infty^2) d\phi d\theta. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь $|J|$ обозначает якобиан. Из условий регулярности компоненты смещений u_i и компоненты напряжений t_i ведут себя соответственно как $1/r_\infty$ и $1/r_\infty^2$. Следовательно, выражение (2.20) зависит только от S , т. е.

$$\lim_{r_\infty \rightarrow \infty} \left[\int_{S_\infty} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \int_{S_\infty} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right] = 0. \quad (2.22)$$

Последние два слагаемых в (2.20) равны нулю.

Таким образом, наиболее эффективным методом для решения внешней задачи упругости является МГЭ, так как автоматически удовлетворяет граничному условию на бесконечности (2.9).

Неприменимость классического МГЭ для задач с вырожденной границей

В случае наличия в задаче трещины, являющейся вырожденной границей, классический МГЭ не применим [107]. Покажем это. Рассмотрим задачу, в которой к полости с границей S^* примыкает трещина с берегами S^+ и S^- , подобно изображенной на рис. 2.1 конфигурации. Функции $U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$, $T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ решения Кельвина обладают свойствами

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^+) &= U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^-), \\ T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^+) &= -T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^-), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $\mathbf{x}^\pm \in S^\pm$ и $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^-$. ГИУС (2.13) для расширенной границы $S = S^* + S^+ + S^-$ с учетом (2.23) даст следующие уравнения для точек \mathbf{x}^+ и \mathbf{x}^- :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \delta_{ij} (u_i(\mathbf{x}^+) + u_i(\mathbf{x}^-)) = \\
& = \int_{S^*} U_{ij}(\mathbf{x}^\pm, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \int_{S^*} T_{ij}(\mathbf{x}^\pm, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{S^-} U_{ij}(\mathbf{x}^\pm, \mathbf{x}) t_j^*(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \int_{S^-} T_{ij}(\mathbf{x}^\pm, \mathbf{x}) \Delta u_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (2.24)
\end{aligned}$$

в которых введены обозначения

$$\begin{aligned}
t_i^*(\mathbf{x}) &= t_i(\mathbf{x}^+) + t_i(\mathbf{x}^-), \\
\Delta u_i(\mathbf{x}) &= u_i(\mathbf{x}^+) - u_i(\mathbf{x}^-). \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Уравнения (2.24) для точек \mathbf{x}^+ и \mathbf{x}^- совпадают. Следовательно, интегральное уравнение смещений вырождается в случае наличия вырожденной границы, которой является трещина.

Поэтому для задач с вырожденной границей используются специальные разновидности МГЭ: многозонный МГЭ [107–109], метод разрывных смещений [110, 111] и дуальный МГЭ [9, 15, 112–117].

2.2.2. Многозонный МГЭ

Для простоты рассмотрим построение многозонного метода граничных элементов для внешней задачи упругости, область которой состоит из двух подобластей. В каждой из них упругий однородный материал характеризуется своими упругими постоянными E и ν . Отметим, что приводимые рассуждения применимы и в случае многих подобластей.

Постановка задачи упругости для двух подобластей

Вся область задачи упругости $V = V_1 + V_2$ разбивается на две подобласти: V_1 с границей $\partial V_1 = S_1$ и V_2 с границей $\partial V_2 = S_2$, которые связаны между собой через интерфейсную границу S_{12} , как показано на рис. 2.4. Тогда в каждой из подобластей V_1 и V_2 области V выполнены уравнения статического равновесия (2.1).

Для каждой из подобластей V_1 и V_2 выпишем граничные условия на части границы за исключением границы между областями S_{12} :

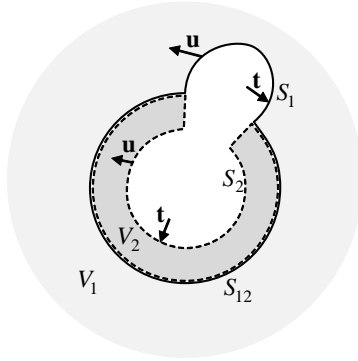


Рис. 2.4. Двухзонная задача упругости: подобласть V_1 с внутренней S_1 и внешней на бесконечности границами и подобласть V_2 с границей S_2 , часть которой S_{12} является общей границей с V_1 .

$$\begin{aligned} t_i(\mathbf{x}) &= \sigma_{ij}(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x}) = h_i^1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S_1 \setminus S_{12}, \\ t_i(\mathbf{x}) &= \sigma_{ij}(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x}) = h_i^2(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S_2 \setminus S_{12}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь h_i^1 и h_i^2 — некоторые известные функции, а n_j — компоненты единичной нормали к поверхности. Отметим, что если область V_1 не является внешней, допускаются смешанные граничные условия на $S_1 \setminus S_{12}$ и $S_2 \setminus S_{12}$ (т. е. на части границы задаются смещения, на другой ее части — напряжения).

На интерфейсной части границы S_{12} выполняются условия полной сцепки, т. е. условия равновесия сил и неразрывности смещений:

$$\begin{aligned} t_i(\mathbf{x}_1) + t_i(\mathbf{x}_2) &= 0, \\ u_i(\mathbf{x}_1) &= u_i(\mathbf{x}_2), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S_{12}$ и точки \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 совпадают.

Для внешней подобласти V_1 добавим еще условие на бесконечности (2.9).

Дополняя уравнения (2.1) законом Гука с упругими параметрами E_1, ν_1 в области V_1 и с упругими параметрами E_2, ν_2 в области V_2 , получим уравнения Навье для компонент смещений. Таким образом, поставлена замкнутая дифференциальная задача упругости.

Применение многозонного МГЭ для расчета тел с трещинами

Многозонный МГЭ является распространением классического МГЭ для регулярной границы [118] на несколько областей, имеющих общие границы. Применительно к решению задачи распространения трещины от полости также может быть взят двухзонный МГЭ. Одна область в нем — V_1 примыкает к нижнему берегу S^- трещины (рис. 2.5) и распространяется на бесконечность. К V_1 примыкает по искусственной границе S_{12} вторая конечная область V_2 , основанием которой является верхний берег трещины S^+ . Область V_1 имеет внутреннюю границу $S_1 = S^- + S_{12} + S_1^*$ и внешнюю на бесконечности. Область V_2 имеет только внутреннюю границу $S_2 = S^+ + S_{12} + S_2^*$. Поверхности S_1^* и S_2^* принадлежат поверхности полости S^* в местах ее прохождения через области V_1 и V_2 соответственно. Каждая из подобластей не содержит вырождающихся границ, и классический МГЭ может быть применен для них. На интерфейсной части границы S_{12} выполняются условия полной сцепки (2.27), т. е. условия равновесия сил и неразрывности смещений. ГИУС для каждой из областей есть

$$c_{ij}(\mathbf{x}')u_j(\mathbf{x}') = \int_{S_k} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{S_k} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x}' \in S_k, k = 1, 2. \quad (2.28)$$

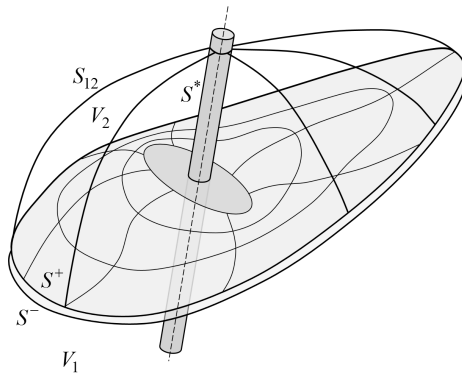


Рис. 2.5. Использование многозонного МГЭ для решения задачи с трещиной.

В (2.28) $c_{ij}(\mathbf{x}') = -\frac{1}{2}\delta_{ij}$ для обеих подобластей в случае гладкой границы в точке \mathbf{x}' .

Построение результирующей системы линейных уравнений

После аппроксимации граничными элементами ГИУС в каждой из областей получим следующие СЛАУ:

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_{12}] \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_{12} \end{pmatrix} &= [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_{12}] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_{12} \end{pmatrix}, \\ [\mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_{21}] \begin{pmatrix} \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_{21} \end{pmatrix} &= [\mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_{21}] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь в первом равенстве первые n_1 уравнений соответствуют участку границы $S_1 \setminus S_{12}$, а следующие n_{12} соответствуют S_{12} . Во втором равенстве первые n_2 уравнений соответствуют участку границы $S_2 \setminus S_{12}$, а следующие n_{12} соответствуют S_{12} . В матрицах, обозначенных $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_{12}$, сосредоточены интегралы по ядру U_{ij} , а в матрицах, обозначенных $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_{12}$, сосредоточены интегралы по ядру T_{ij} .

Далее обычно [119] строится объединенная система линейных уравнений, которая включает непосредственно матрицы $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_{12}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_{12}$. С учетом в матричной форме граничных условий (2.27) объединенная система принимает вид

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_{21} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_{12} \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_{21} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_{21} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_{21} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица. Систему (2.30) можно переписать в более компактном виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_{12} & -\mathbf{U}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{21} & -\mathbf{U}_{21} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_{12} \\ \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Размерность результирующей матрицы в (2.31) равна $n_1 + n_2 + 2n_{12}$.

Опишем далее оригинальный метод построения результирующей системы меньшей размерности. Домножая слева системы (2.29) на матрицы, обратные к матрицам \mathbf{U} (матрицы \mathbf{U} по построению невырождены [119]), получим для каждой из подзадач матрицы псевдожесткости \mathbf{K}

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_{12} \end{pmatrix} = \\ & = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_{12}]^{-1} [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_{12}] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_{12} \end{pmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \\ \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_{21} \end{pmatrix} = \\ & = [\mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_{21}]^{-1} [\mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_{21}] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_{21} \end{pmatrix}. \quad (2.32) \end{aligned}$$

Далее, используя методiku, аналогичную методике объединения матриц жесткости в методе конечных элементов [120–122], и учитывая граничные условия на интерфейсной границе S_{12} (2.27), получим систему линейных алгебраических уравнений для объединенной задачи

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} + \mathbf{K}_{24} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_{12} \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Размерность результирующей матрицы в (2.33) равна $n_1 + n_2 + n_{12}$, что меньше, чем в (2.30).

Решая систему линейных алгебраических уравнений (2.33), найдем компоненты смещений на $S_1 \setminus S_{12}$ и $S_2 \setminus S_{12}$ объединенной задачи упругости. Далее, используя системы (2.29), найдем

компоненты реакций на границе S_{12} . По смещениям \mathbf{u}^\pm на берегах трещины S^\pm определяется ее открытие

$$W(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^+(\mathbf{x}^+)\mathbf{n}^+(\mathbf{x}^+) + \mathbf{u}^-(\mathbf{x}^-)\mathbf{n}^-(\mathbf{x}^-), \quad (2.34)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\pm \in S^\pm$.

Недостатком методики применения многозонного МГЭ для решения задачи распространения трещины от полости является необходимость перестроения искусственной границы S^{12} на каждом шаге роста трещины.

Разрывные граничные элементы

Вышеописанный многозонный метод граничных элементов с аппроксимацией изопараметрическими элементами (подробнее об изопараметрических элементах см. [106]) применим, если границы задачи являются гладкими, т. е. во всех точках этих границ однозначно определена единичная нормаль [123]. Если же граница включает в себя участки ребер или примыканий, то существуют точки, где нет однозначного определения единичной нормали. Также многозонный метод граничных элементов допускает только одно значение вектора напряжений в таких точках, а следовательно, напряжения аппроксимируются непрерывно вдоль границы, в том числе через ребра и примыкания. Важно, чтобы получаемые в методе граничных элементов матрицы были квадратными, т. е. каждой точке соответствовало только одно значение напряжений.

Для разрешения такой аппроксимационной проблемы здесь предложены разрывные граничные элементы, т. е. такие элементы, которые допускают разрывное решение вдоль по ним. Свойство разрывности для изопараметрического элемента задается путем смещения внешних опорных точек \mathbf{x}^k внутрь элемента на некоторое расстояние $(1 - \lambda)$ или $(1 - \lambda_0)$ в локальной системе координат элемента (ξ_1, ξ_2) , как показано на рис. 2.6 для линейного треугольного и билинейного четырехугольного элементов. Аппроксимация геометрии элемента и функций на разрывном элементе будет совпадать с аппроксимацией на непрерывном элементе. Тогда координаты элемента, компонен-

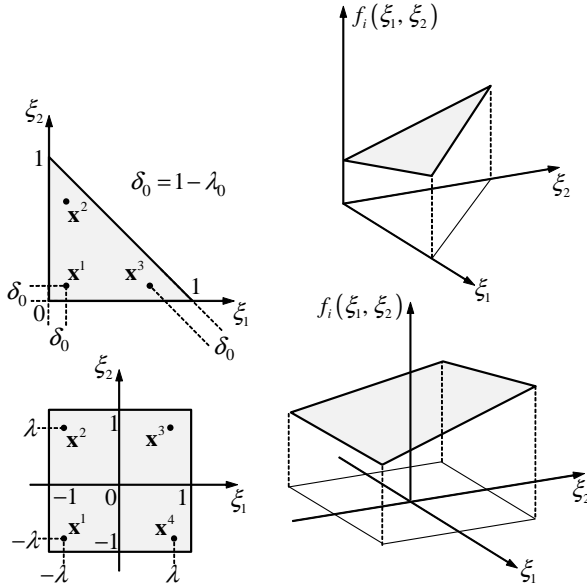


Рис. 2.6. Шаблон элемента (слева) и аппроксимация функций u_i и t_i на нем (справа).

ты смещений и компоненты напряжений на нем можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 x_i(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{m=1}^M x_i^m \phi_m(\xi_1, \xi_2), \\
 u_i(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{m=1}^M u_i^m \phi_m(\xi_1, \xi_2), \\
 t_i(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{m=1}^M t_i^m \phi_m(\xi_1, \xi_2).
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Здесь M — количество опорных точек элемента, а ϕ_m — интерполирующие формфункции.

В треугольных элементах считается, что неизвестные заданы в некоторых точках внутри элемента ($\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$) и имеют линейную аппроксимацию вдоль элемента. Геометрия элемента описывается плоским треугольником. Таким образом, геометрия, а также значения поля смещений и поля напряжений на

элемента представляются посредством трех ($M = 3$) линейных интерполирующих формфункций

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\lambda_0 - \xi_1 - \xi_2}{3\lambda_0 - 2}, \\ \phi_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\lambda_0 + \xi_1 - 1}{3\lambda_0 - 2}, \\ \phi_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\lambda_0 + \xi_2 - 1}{3\lambda_0 - 2}, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}(\lambda + 1).\end{aligned}\quad (2.36)$$

В четырехугольных элементах считается, что неизвестные заданы в некоторых точках внутри элемента ($\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4$) и имеют билинейную аппроксимацию в пространстве (ξ_1, ξ_2) , т. е. линейную по любому из аргументов ξ_1 и ξ_2 . Аналогично, геометрия элемента, поля смещений и напряжений описываются четырьмя ($M = 4$) билинейными интерполирующими формфункциями

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\xi_1}{\lambda} - 1 \right) \left(\frac{\xi_2}{\lambda} - 1 \right), \\ \phi_2(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\xi_1}{\lambda} + 1 \right) \left(\frac{\xi_2}{\lambda} - 1 \right), \\ \phi_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\xi_1}{\lambda} + 1 \right) \left(\frac{\xi_2}{\lambda} + 1 \right), \\ \phi_4(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\xi_1}{\lambda} - 1 \right) \left(\frac{\xi_2}{\lambda} + 1 \right).\end{aligned}\quad (2.37)$$

Наряду с непрерывными граничными элементами использование разрывных элементов около ребер и примыканий позволяет задавать разрывные компоненты напряжений на них в таком многозонном методе граничных элементов.

2.2.3. Метод разрывных смещений

Метод разрывных смещений (МРС) был предложен в работе [110]. В этом методе неизвестными функциями являются компоненты вектора разрыва смещений на поверхности трещины. В исходном двумерном варианте метода трещина аппроксимировалась прямолинейными отрезками, и разрыв смещений предполагался постоянным вдоль каждого отрезка. На-

пряжения на линии трещины выражались через разрыв смещений вдоль прямолинейных отрезков с использованием функций Папковича и суперпозиции. В работе [124] в явном виде показано, что МРС эквивалентен МГЭ, в котором вместо сингулярного граничного интегрального уравнения смещений (ГИУС) используется гиперсингулярное интегральное уравнение напряжений (ГИУН). Остановимся на этом чуть подробнее.

В терминах принятых в настоящей монографии обозначений интегральное уравнение, положенное в основу МРС, записывается в виде

$$t_j(\mathbf{x}^-) = -\int_{S^-} M_{kj}(\mathbf{x}^-, \mathbf{x}) \Delta u_k(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (2.38)$$

где $\Delta u_k(\mathbf{x})$ – разрывы смещений на трещине $S^\pm(\mathbf{x}^\pm)$ (см. рис. 2.1), определенные в (2.25), $\mathbf{t} = \mathbf{t}^- = -\mathbf{t}^+$, $M_{kj}(\mathbf{x}^-, \mathbf{x}) = n_j(\mathbf{x}^-) S_{kij}(\mathbf{x}^-, \mathbf{x})$, а функции S_{kij} получаются из ядер T_{ij} (см. (2.11)) дифференцированием по соответствующим координатам (полные выражения для S_{kij} можно найти, например, в [125]). Символом \int в (2.38) и далее обозначено главное значение гиперсингулярного интеграла в смысле Адамара. Уравнение (2.38) связывает величину напряжений в изолированной трещине со значениями разрыва смещений на ней. В частности, из этого уравнения по известному распределению давления в трещине находится ее раскрытие. Граничное интегральное уравнение (2.38) в [8] решается с помощью МГЭ. МРС в комбинации с МГЭ также применяется для решения 3D-задач распространения трещины в [13–15].

В [14, 126] граничное интегральное уравнение для напряжений и разрывов смещений на изолированной трещине в неограниченном пространстве, подобное уравнению (2.38) и имеющее высокую степень сингулярности ($1/r^3$), преобразованием ядер и интегрированием его частей приводится к уравнению с меньшей степенью сингулярности. Результирующее интегральное уравнение записывается в слабой форме с пробной функцией $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$:

$$\int_{S^-} t_j(\mathbf{y}) \omega_j(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = - \int_{S^-} F(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})) \int_{S^-} Q(\Delta \mathbf{u}(\mathbf{y})) dS(\mathbf{x}) dS(\mathbf{y}), \quad (2.39)$$

и имеет слабую сингулярность ($1/r$), с которой более подходит для численного решения.

Поскольку ядра в (2.39) являются слабо сингулярными, то все поверхностные интегралы существуют в обычном значении. Для дискретизации всюду, кроме окрестности фронта трещины, используются стандартные изопараметрические элементы. У фронта трещины применяются специальные элементы с дополнительными степенями свободы, связанными с узлами, лежащими вдоль фронта трещины. Прифронтовые элементы обеспечивают высокий порядок точности вычислений коэффициентов интенсивности напряжений. Напряжения, разрывы смещений и пробная функция представляются через узловые их значения с помощью формфункций. Для аппроксимации ядер применяется интерполяционный метод [126]. В случае, когда интегрирование включает в себя ближайшие пары элементов, подынтегральные выражения становятся почти особенными. Для обеспечения необходимой точности в вычислениях таких интегралов применяется специальный численный метод [6], названный симметричным методом Галеркина граничных элементов.

В одной из первых работ, посвященных моделированию распространения трещины в трехмерной постановке [8], МРС был использован для описания распространения трещины ГРП. В этом исследовании скважина, через которую жидкость закачивалась в трещину, не учитывалась, так как ее размер предполагался пренебрежимо малым по сравнению с размером трещины. В работе [127] было проведено трехмерное моделирование начальной стадии распространения трещины от нагруженной давлением скважины. Для того чтобы применить МРС для решения задачи с полостью, скважина была заменена цилиндрической трещиной, составленной из элементов МРС. Внутренность скважины, нагруженная давлением, была заменена фиктивным телом с теми же механическими свойствами, что и окружающая порода. Решения внешней и внутренней задач находились одновременно.

Следует отметить, что решение внутренней задачи о деформации фиктивного тела допускает смещение и вращение этого тела. Поэтому для получения единственного решения внутрен-

ней задачи необходимо зафиксировать смещения в нескольких точках внутреннего фиктивного тела. Это необходимо, даже если требуется рассчитать напряженно-деформированное состояние только во внешней области. Во внешней области для получения единственного решения для смещений используется условие о конечности смещений на бесконечности. Если задача имеет две полости симметрии, как в указанной работе [127], то смещения во внутренней области определяются однозначно благодаря этой симметрии. Если же рассматриваемая задача не симметрична, то необходимо добавлять дополнительные элементы с нулевыми граничными условиями для смещений на внутренней границе этих элементов, чтобы предотвратить смещение и вращение внутреннего тела. Однако добавление таких элементов может привести к появлению дополнительных напряжений, которые повлияют и на решение внешней задачи. Поэтому в общем случае решение, полученное МРС с использованием фиктивного тела, может не совпадать с решением исходной задачи, полученным, например, с помощью дуального МГЭ. Таким образом, МРС следует с большой осторожностью использовать для решения задач о трещинах, в которых присутствуют полости, и отсутствуют плоскости симметрии.

2.2.4. Обобщенный метод конечных элементов

В самом начале раздела 2.2 «Метод решения» мы исключили из рассмотрения МКЭ как требующий аппроксимации объема упругой среды от трещины вплоть до удаленной границы. При этом особую сложность применения обычного МКЭ при решении задачи распространения трещины представляет необходимость перестраивания конечно-элементной сетки в окрестности поверхности трещины на каждом шаге распространения для ее выделения. Однако в последние годы был разработан и применен в 3D-задачах моделирования гидроразрыва обобщенный, или расширенный, метод конечных элементов (Generalized or Extended Finite Element Method, G/ХМКЭ) [7, 128]. Особенностью обобщенного МГЭ является отсутствие необходимости описания поверхности трещины конечно-элементной сеткой. Разрыв смещений поперек поверхности трещины аппроксимируется через разрывные дополнительные степени свободы. Они

описывают разрыв смещений внутри элемента и асимптотическое поведение смещений на фронте трещины. В результате трещина распространяется сквозь конечные элементы. Сложностью использования обобщенного МГЭ является невозможность включить в описываемый процесс модель течения вязкой жидкости. Во всех указанных работах предполагается постоянство давления во всей трещине. Также недостатком обобщенного МГЭ остается необходимость аппроксимации объема среды вплоть до удаленной границы.

2.2.5. Дуальный МГЭ

История создания

Наиболее пригодным для решения задачи упругости в трехмерной модели распространения трещины от произвольной полости является дуальный МГЭ [115, 129]. Первое использование дуальных интегральных уравнений в задачах с трещинами было описано в работе [112]. В работах [113, 114] авторы использовали нормальную производную от ГИУС для создания эрмитова элемента третьего порядка, в котором количество неизвестных превосходило количество уравнений. Для случая вырожденной границы впервые дуальное интегральное представление было предложено в работах [115, 129] как метод решения задач упругости с трещинами. Для решения проблемы вырожденной границы в работах была выдвинута идея дуальных граничных интегральных уравнений, полученных на основе комбинации стандартного граничного интегрального уравнения и его производной. Там же был представлен теоретический базис дуальных граничных интегральных уравнений, показывающий, как дифференцировать ГИУС и использовать закон Гука для получения ГИУН. В работе [116] было реализовано объединение ГИУС и ГИУН в одну систему для решения двумерной задачи упругости с трещиной. Оба берега трещины аппроксимировались граничными элементами второго порядка, узлы которых находились внутри элементов. Использование этих точек в качестве точек коллокации удовлетворяла условиям Гельдера на гладкость функций в гиперсингулярном интегральном уравнении, так как формфункции непрерывно дифференцируемы в

этих точках. В работах [9, 117] метод решения двумерных задач был обобщен на трехмерный случай.

Граничное интегральное уравнение смещений

Для точек \mathbf{y} на регулярной границе S^* запишем ГИУС, аналогичное ГИУС (2.13) в классическом МГЭ:

$$c_{ij}(\mathbf{y})u_i(\mathbf{y}) = \int_{S^*} U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})t_i(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{S^*} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})u_i(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{S^-} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})\Delta u_i(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}). \quad (2.40)$$

Граничное интегральное уравнение напряжений

Для решения проблемы с вырождающимся ГИУС (2.24) на трещиноватой границе (см. раздел 2.2.1) в дуальном МГЭ предлагается на одном из берегов трещины вместо ГИУС (2.24) решать ГИУН

$$t_j(\mathbf{y}^-) = \int_{S^*} L_{ij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x})t_i(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{S^*} M_{ij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x})u_i(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{S^-} M_{ij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x})\Delta u_i(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in S^-. \quad (2.41)$$

Здесь $L_{ij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x}) = D_{kij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x})n_k(\mathbf{y}^-)$ и $M_{ij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x}) = S_{kij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x})n_k(\mathbf{y}^-)$ (см. [125, 130]). Уравнение (2.41) не содержит компонент смещений u_i на трещиноватой границе и позволяет найти неизвестные компоненты разрывов смещений Δu_i на границе. Главной сложностью ГИУН является создание эффективной и точной процедуры вычисления главного значения Адамара интеграла в уравнении (2.41).

Дискретизация границы и формирование системы линейных уравнений

Продемонстрируем численный метод решения ГИУН (2.41) на примере тела только с трещинами ($S = S^+ + S^-$). Вся граница области S аппроксимируется граничными элементами, как показано на рис. 2.7 слева:

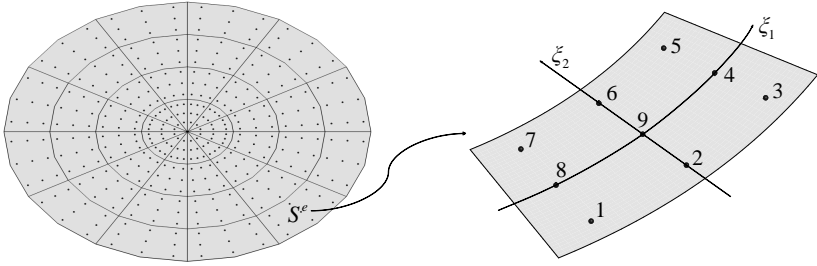


Рис. 2.7. Разбиение S границы на разрывные квадратичные четырехугольные элементы S^e (слева) и параметризация (ξ_1, ξ_2) элемента с $N_\alpha = 9$ (справа).

$$S \simeq \sum_{e=1}^{N_e} S^e. \quad (2.42)$$

Каждый элемент S^e параметризуется локальными координатами (ξ_1, ξ_2) , как показано на рис. 2.7 справа. Компоненты радиус-векторов, разрывов смещений, напряжений в произвольной точке элемента (ξ_1, ξ_2) представляются так же, как и в случае классического МГЭ, в виде

$$f_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} f_i(\mathbf{x}^\alpha) \phi_\alpha(\xi_1, \xi_2). \quad (2.43)$$

Здесь \mathbf{x}^α — узловые точки элемента, $\phi_\alpha(\xi_1, \xi_2)$ — формфункции элемента, N_α — количество точек и формфункций элемента.

Уравнение (2.41) с учетом (2.42) и (2.43) запишется в виде

$$t_j(\mathbf{y}^-) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha(e)} -\Delta u_i^{e\alpha} A_{ij\alpha},$$

$$A_{ije\alpha} = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} M_{ij}(\mathbf{y}^-, \xi_1, \xi_2) \phi_\alpha(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (2.44)$$

Здесь $J(\xi_1, \xi_2)$ — якобиан перехода в локальную систему координат элемента. Разрывы смещений $\Delta u_i^{e\alpha}$ в α -й узловой точке e -го элемента выносятся за знак интегрирования, так как не

зависят от переменных интегрирования ξ_1 и ξ_2 . Заметим, что интегралы в формуле (2.44) зависят только от геометрии границы области и не зависят от граничных условий.

Записав уравнение (2.44) в узловых точках $\mathbf{y}^{e\alpha}$, получим СЛАУ относительно неизвестных функций Δu_i :

$$\mathbf{M} \Delta \mathbf{u} = -\mathbf{t}. \quad (2.45)$$

Здесь $\Delta \mathbf{u}$ и \mathbf{t} — векторы компонент разрывов смещений и напряжений во всех узловых точках, \mathbf{M} — матрица, составленная из значений интегралов в уравнении (2.44).

В случае тела с регулярной границей и трещинами ($S = S^* + S^+ + S^-$) система (2.45) запишется в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} - \frac{1}{2}\mathbf{I} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & 0 \\ \mathbf{L}_{21} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

где \mathbf{U} и \mathbf{T} — подматрицы, составленные из значений интегралов по элементам в DBIE (2.40), \mathbf{L} и \mathbf{M} — подматрицы из ГИУН (2.41).

Граничные элементы и базисные функции

Так как ГИУН (2.41) требует гладкости поверхности в точках коллокации \mathbf{y} на трещине S^\pm , в дуальном МГЭ необходимо использовать разрывные элементы, все узлы которых находятся внутри элемента, как показано на рис. 2.7. В настоящей монографии использовались разрывные линейные (3-точечные треугольные и 4-точечные четырехугольные) и квадратичные (6-точечные треугольные и 9-точечные четырехугольные) элементы и элементы специального вида для элементов, примыкающих к фронту трещины [131]:

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1(\xi_1 - \lambda)(s - 1)(s - p)}{2\lambda^2(q - 1)(q - p)}, \\ \phi_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{-(\xi_1 - \lambda)(\xi_1 + \lambda)(s - 1)(s - p)}{\lambda^2(q - 1)(q - p)}, \\ \phi_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1(\xi_1 + \lambda)(s - 1)(s - p)}{2\lambda^2(q - 1)(q - p)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_4(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1(\xi_1 + \lambda)(s - q)(s - p)}{2\lambda^2(q - 1)(p - 1)}, \\
\phi_5(\xi_1, \xi_2) &= \frac{-\xi_1(\xi_1 + \lambda)(s - q)(s - 1)}{2\lambda^2(q - p)(p - 1)}, \\
\phi_6(\xi_1, \xi_2) &= \frac{(\xi_1 - \lambda)(\xi_1 + \lambda)(s - q)(s - 1)}{\lambda^2(q - p)(p - 1)}, \\
\phi_7(\xi_1, \xi_2) &= \frac{-\xi_1(\xi_1 - \lambda)(s - q)(s - 1)}{2\lambda^2(q - p)(p - 1)}, \\
\phi_8(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1(\xi_1 - \lambda)(s - q)(s - p)}{2\lambda^2(q - 1)(p - 1)}, \\
\phi_9(\xi_1, \xi_2) &= \frac{-(\xi_1 - \lambda)(\xi_1 + \lambda)(s - q)(s - p)}{\lambda^2(q - 1)(p - 1)},
\end{aligned} \tag{2.47}$$

где $s = \sqrt{1 + \xi_2}$, $p = \sqrt{1 + \lambda}$, $q = \sqrt{1 - \lambda}$, λ — параметр, регулирующий положение опорных точек в элементе.

Вычисление главного значения Адамара сингулярного интеграла

Главная сложность ДМГЭ заключается в построении алгоритма вычисления главного значения Адамара сингулярного интеграла по граничному элементу S^e , содержащему точку коллокации \mathbf{y} :

$$I_{ij}(\mathbf{y}) = \rlap{-}\int_{S^e} K_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \tag{2.48}$$

где подынтегральное выражение

$$K_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = M_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})\phi_\alpha(\mathbf{x})J(\mathbf{x}) = S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})n_k(\mathbf{y})\phi_\alpha(\mathbf{x})J(\mathbf{x}). \tag{2.49}$$

Для вычисления интеграла I_{ij} (2.48) используем метод выделения сингулярности [132]. Этот метод заключается в разложении в ряд подынтегрального выражения (2.49) в окрестности особой точки \mathbf{y} и в вычислении специальным способом интегралов от первых членов этого разложения. Таким образом,

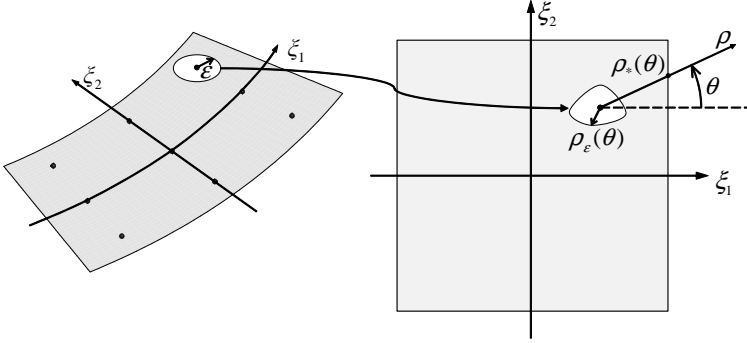


Рис. 2.8. Граничный элемент с ε -окрестностью узла в декартовой (слева) и локальной (ξ_1, ξ_2) (справа) системах координат.

интеграл I_{ij} (2.48) расписывается в виде суммы трех интегралов

$$I_{ij}(\mathbf{y}) = I_{ij}^{-1}(\mathbf{y}) + I_{ij}^{-2}(\mathbf{y}) + I_{ij}^{-3}(\mathbf{y}), \quad (2.50)$$

где

$$I_{ij}^{-1}(\mathbf{y}) = \int_{S^e} \left(K_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \frac{K_{ij}^{-2}(\theta)}{\rho^2} - \frac{K_{ij}^{-3}(\theta)}{\rho^3} \right) dS(\mathbf{x}), \quad (2.51)$$

$$I_{ij}^{-2}(\mathbf{y}) = \int_{S^e} \frac{K_{ij}^{-2}(\theta)}{\rho^2} dS(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{\rho_\varepsilon(\theta)}^{\rho_*(\theta)} \frac{K_{ij}^{-2}(\theta)}{\rho^2} \rho d\rho d\theta, \quad (2.52)$$

$$I_{ij}^{-3}(\mathbf{y}) = \int_{S^e} \frac{K_{ij}^{-3}(\theta)}{\rho^3} dS(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{2\pi} \int_{\rho_\varepsilon(\theta)}^{\rho_*(\theta)} \frac{K_{ij}^{-3}(\theta)}{\rho^3} \rho d\rho d\theta + \frac{h(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right). \quad (2.53)$$

Здесь ρ и θ — локальные полярные координаты элемента с центром в точке коллокации \mathbf{y} , изображенные на рис. 2.8. Функции $K_{ij}^{-2}(\theta)$ и $K_{ij}^{-3}(\theta)$ — первые члены разложения в ряд по переменной ρ подынтегрального выражения K_{ij} (2.49), $\rho_\varepsilon(\theta)$ — радиус ε -окрестности в локальной полярной системе координат элемента, $\rho_*(\theta)$ — радиус границы элемента. Заметим, что ε -окрестность в локальной системе координат не является

окружностью и $\rho_\varepsilon(\theta)$ зависит от полярного угла θ . Коэффициент $h(\mathbf{y})$ в (2.53) характеризует асимптотику бесконечной части интеграла (2.53) [133] в точке \mathbf{y} .

Вычисление слабосингулярной части интеграла

Для вычисления слабосингулярного интеграла $I_{ij}^{-1} = O(1/\rho)$ (2.51) в настоящей работе был применен метод трансформации области, предложенный в [106]. В этом методе элемент разбивается на треугольники, одна из вершин которых совпадает с особой точкой функции. Каждый треугольник заменой координат трансформируется в квадрат таким образом, что одно ребро квадрата соответствует вершине с особой точкой, как показано на рис. 2.9. Якобиан трансформации треугольника в квадрат позволяет избавиться от сингулярности $1/\rho$ и вычислять интегралы от слабосингулярных функций с высокой точностью.

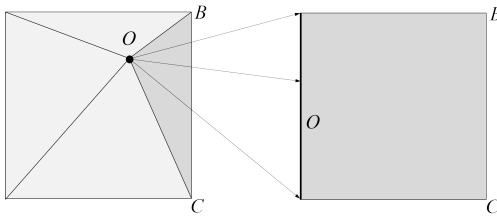


Рис. 2.9. Разбиение элемента на треугольники и трансформация треугольника OAB с вершиной в особой точке в квадрат с ребром O , соответствующим особой точке.

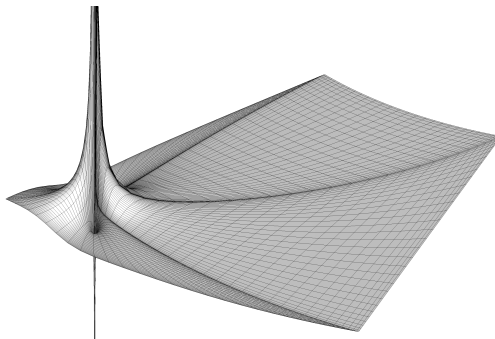


Рис. 2.10. Распределение подынтегрального выражения $K_{33} - K_{33}^{-2}/\rho^2 - K_{33}^{-3}/\rho^3$ по поверхности граничного элемента и квадратная сетка его для численного интегрирования.

На рис. 2.10 показаны характерный вид слабосингулярной функции в дуальном МГЭ и квадратурная сетка для его численного интегрирования.

Вычисление главного значения сингулярных и гиперсингулярных интегралов

Для вычисления оставшихся двух сильносингулярного $I_{ij}^{-2} = O(1/\rho^2)$ (2.52) и гиперсингулярного $I_{ij}^{-3} = O(1/\rho^3)$ (2.53) интегралов необходимо вычислить члены K_{ij}^{-2} и K_{ij}^{-3} разложения по ρ подынтегрального выражения в (2.48), а также разложить в ряд по ε радиус $\rho_\varepsilon(\theta)$.

Запишем первые члены разложения радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ по переменной ρ

$$\mathbf{r}(\theta) = \mathbf{a}(\theta)\rho + \mathbf{b}(\theta)\rho^2 + O(\rho^3), \quad (2.54)$$

где

$$\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{x}_{,\xi_1} \cos(\theta) + \mathbf{x}_{,\xi_2} \sin(\theta), \quad (2.55)$$

$$\mathbf{b}(\theta) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{,\xi_1\xi_1} \cos^2(\theta) + 2\mathbf{x}_{,\xi_1\xi_2} \sin(\theta) \cos(\theta) + \mathbf{x}_{,\xi_2\xi_2} \sin^2(\theta)). \quad (2.56)$$

Тогда длина вектора $r = |\mathbf{r}|$ запишется в виде

$$r(\theta) = \rho a(\theta) (1 + \rho B(\theta) + O(\rho^2)), \quad (2.57)$$

где

$$a(\theta) = |\mathbf{a}(\theta)|, \quad (2.58)$$

$$B(\theta) = \frac{(\mathbf{a}(\theta) \cdot \mathbf{b}(\theta))}{a^2(\theta)}. \quad (2.59)$$

Далее запишем уравнение (2.57) для радиус-вектора ε -окрестности и выразим из него радиус $\rho_\varepsilon(\theta)$:

$$\rho_\varepsilon(\theta) = \varepsilon \frac{1}{a(\theta)} - \varepsilon^2 \frac{B(\theta)}{a^2(\theta)} + O(\varepsilon^3). \quad (2.60)$$

Проинтегрируем аналитически сингулярные интегралы по переменной ρ :

$$\begin{aligned}
 I_{ij}^{-2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} K_{ij}^{-2}(\theta) (\ln(\rho_*(\theta)) - \ln(\rho_\varepsilon(\theta))) d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} K_{ij}^{-2}(\theta) \ln(a(\theta)\rho_*(\theta)) d\theta + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} K_{ij}^{-2}(\theta) d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} K_{ij}^{-2}(\theta) \ln(a(\theta)\rho_*(\theta)) d\theta, \tag{2.61}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{ij}^{-3} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{2\pi} K_{ij}^{-3}(\theta) \left(\frac{1}{\rho_\varepsilon(\theta)} - \frac{1}{\rho_*(\theta)} \right) d\theta + \frac{h(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right) = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{2\pi} K_{ij}^{-3}(\theta) \left(\frac{a(\theta)}{\varepsilon} + B(\theta) - \frac{1}{\rho_*(\theta)} \right) d\theta + \frac{h(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right) = \\
 &= \int_0^{2\pi} K_{ij}^{-3}(\theta) \left(B(\theta) - \frac{1}{\rho_*(\theta)} \right) d\theta. \tag{2.62}
 \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты разложения $K_{ij}^{-2}(\theta)$ и $K_{ij}^{-3}(\theta)$ зависят только от точки коллокации \mathbf{y} и переменной θ и не зависят от переменной ρ , что позволяет провести интегрирование по ρ аналитически. Значения контурных интегралов (2.61) и (2.62) подсчитываются численным интегрированием.

Разложение в ряд ядра подынтегрального выражения

Ядро S_{kij} в (2.49) имеет вид

$$\begin{aligned}
 S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \times \\
 &\times (S_{kij}^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + S_{kij}^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + S_{kij}^{(3)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + S_{kij}^{(4)}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \frac{1}{r^3(\mathbf{y}, \mathbf{x})}, \tag{2.63}
 \end{aligned}$$

где

$$S_{kij}^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 3r_{,m}n_m ((1 - 2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}), \quad (2.64)$$

$$S_{kij}^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 3\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}), \quad (2.65)$$

$$S_{kij}^{(3)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (1 - 2\nu)(3n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}), \quad (2.66)$$

$$S_{kij}^{(4)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -(1 - 4\nu)n_k \delta_{ij}, \quad (2.67)$$

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r}. \quad (2.68)$$

Для разложения в ряд по ρ ядра S_{kij} (2.63) необходимо найти члены разложения от его составных частей

$$\frac{1}{r^3(\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \frac{1}{\rho^3 a^3(\theta)} (1 - 3\rho B(\theta) + O(\rho^{-1})), \quad (2.69)$$

$$r_{,i}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = A_i(\theta) + \rho dR_i(\theta) + O(\rho^2), \quad (2.70)$$

где

$$A_i(\theta) = \frac{a_i(\theta)}{a(\theta)}, \quad (2.71)$$

$$dR_i(\theta) = \frac{b_i(\theta)}{a(\theta)} - A_i(\theta)B(\theta). \quad (2.72)$$

Вектор нормали в точке интегрирования \mathbf{x} представляется в виде

$$n_i(\mathbf{x}) = n_i(\mathbf{y}) + \rho dN_i(\theta) + O(\rho^2), \quad (2.73)$$

где

$$dN_i(\theta) = n_{i,\xi_1} \cos(\theta) + n_{i,\xi_2} \sin(\theta). \quad (2.74)$$

Разложим в ряд функции $S_{kij}^{(1)}$ (2.64), $S_{kij}^{(2)}$ (2.65), $S_{kij}^{(3)}$ (2.66), $S_{kij}^{(4)}$ (2.67).

Первая функция $S_{kij}^{(1)}$ запишется как

$$S_{kij}^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = S_{kij}^{0(1)}(\theta) + \rho S_{kij}^{1(1)}(\theta) + O(\rho^2), \quad (2.75)$$

где

$$S_{kij}^{0(1)}(\theta) = (a_m(\theta)n_m(\mathbf{y}))Z_{kij}^0(\theta), \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} S_{kij}^{1(1)}(\theta) = & Z_{kij}^1(\theta)[a_m(\theta)n_m(\mathbf{y})] + \\ & + Z_{kij}^0(\theta)[dR_m(\theta)n_m(\mathbf{y}) + a_m(\theta)dN_m(\theta)]. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Z_{kij}^0(\theta) = & 3[(1 - 2\nu)A_k(\theta)\delta_{ij} + \\ & + \nu(A_j(\theta)\delta_{ik} + A_i(\theta)\delta_{jk}) - 5A_k(\theta)A_i(\theta)A_j(\theta)], \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} Z_{kij}^1(\theta) = & 3[(1 - 2\nu)dR_k(\theta)\delta_{ij} + \nu(dR_j(\theta)\delta_{ik} + \\ & + dR_i(\theta)\delta_{jk}) - 5(dR_k(\theta)A_i(\theta)A_j(\theta) + \\ & + A_k(\theta)dR_i(\theta)A_j(\theta) + A_k(\theta)A_i(\theta)dR_j(\theta))]. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Вторая функция $S_{kij}^{(2)}$ запишется как

$$S_{kij}^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = S_{kij}^{0(2)}(\theta) + \rho S_{kij}^{1(2)}(\theta) + O(\rho^2), \quad (2.80)$$

где

$$S_{kij}^{0(2)}(\theta) = 3\nu[n_i(\mathbf{y})A_j(\theta)A_k(\theta) + n_j(\mathbf{y})A_i(\theta)A_k(\theta)], \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} S_{kij}^{1(2)}(\theta) = & 3\nu[n_i(\mathbf{y})(A_j(\theta)dR_k(\theta) + A_k(\theta)dR_j(\theta)) + \\ & + n_j(\mathbf{y})(A_i(\theta)dR_k(\theta) + A_k(\theta)dR_i(\theta)) + \\ & + dN_i(\theta)A_j(\theta)A_k(\theta) + dN_j(\theta)A_i(\theta)A_k(\theta)]. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Третья функция $S_{kij}^{(3)}$ равна

$$S_{kij}^{(3)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = S_{kij}^{0(3)}(\theta) + \rho S_{kij}^{1(3)}(\theta) + O(\rho^2), \quad (2.83)$$

где

$$S_{kij}^{0(3)}(\theta) = (1 - 2\nu) [3n_k(\mathbf{y})A_i(\theta)A_j(\theta) + n_j(\mathbf{y})\delta_{ik} + n_i(\mathbf{y})\delta_{jk}], \quad (2.84)$$

$$S_{kij}^{1(3)}(\theta) = (1 - 2\nu) [3n_k(\mathbf{y})(A_i(\theta)dR_j(\theta) + A_j(\theta)dR_i(\theta)) + 3dN_k(\theta)A_i(\theta)A_j(\theta) + dN_j(\theta)\delta_{ik} + dN_i(\theta)\delta_{jk}]. \quad (2.85)$$

Четвертая функция S_{kij}^3 запишется как

$$S_{kij}^{(4)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = S_{kij}^{0(4)} + \rho S_{kij}^{1(4)} + O(\rho^2), \quad (2.86)$$

где

$$S_{kij}^{0(4)}(\theta) = -(1 - 4\nu)n_k\delta_{ij}, \quad (2.87)$$

$$S_{kij}^{1(4)}(\theta) = -(1 - 4\nu)dN_k\delta_{ij}. \quad (2.88)$$

Тогда разложение ядра S_{kij} (2.63) выглядит как

$$S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = S_{kij}^{-3}(\theta)\rho^{-3} + S_{kij}^{-2}(\theta)\rho^{-2} + O(\rho^{-1}), \quad (2.89)$$

где

$$S_{kij}^{-3}(\theta) = \frac{\mu}{4\pi(1 - \nu)} \frac{S_{kij}^0(\theta)}{a^3(\theta)}, \quad (2.90)$$

$$S_{kij}^{-2}(\theta) = \frac{\mu}{4\pi(1 - \nu)} \frac{S_{kij}^1(\theta) - 3B(\theta)S_{kij}^0(\theta)}{a^3(\theta)}. \quad (2.91)$$

Здесь

$$S_{kij}^0(\theta) = S_{kij}^{0(1)}(\theta) + S_{kij}^{0(2)}(\theta) + S_{kij}^{0(3)}(\theta) + S_{kij}^{0(4)}(\theta), \quad (2.92)$$

$$S_{kij}^1(\theta) = S_{kij}^{1(1)}(\theta) + S_{kij}^{1(2)}(\theta) + S_{kij}^{1(3)}(\theta) + S_{kij}^{1(4)}(\theta). \quad (2.93)$$

Для разложения в ряд подынтегрального выражения (2.49) необходимо вычислить члены разложения функций $\phi_\alpha(\mathbf{x})$ и $J(\mathbf{x})$. Формфункция ϕ_α в точке интегрирования \mathbf{x} запишется в виде

$$\phi_\alpha(\mathbf{x}) = \phi_\alpha(\mathbf{y}) + \rho d\Phi(\theta) + O(\rho^2), \quad (2.94)$$

где

$$d\Phi(\theta) = \phi_{\alpha,\xi_1} \cos(\theta) + \phi_{\alpha,\xi_2} \sin(\theta). \quad (2.95)$$

Якобиан J в точке интегрирования \mathbf{x} равен

$$J(\mathbf{x}) = J(\mathbf{y}) + \rho dJ(\theta) + O(\rho^2), \quad (2.96)$$

где

$$dJ(\theta) = J_{,\xi_1} \cos(\theta) + J_{,\xi_2} \sin(\theta). \quad (2.97)$$

Тогда разложение в ряд подынтегрального выражения (2.49) в запишется в виде

$$K_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = K_{ij}^{-3}(\theta)\rho^{-3} + K_{ij}^{-2}(\theta)\rho^{-2} + O(\rho^{-1}), \quad (2.98)$$

где

$$K_{ij}^{-3}(\theta) = n_k(\mathbf{y})S_{kij}^{-3}(\theta)\phi_\alpha(\mathbf{y})J(\mathbf{y}). \quad (2.99)$$

$$K_{ij}^{-2}(\theta) = n_k(\mathbf{y}) \left[S_{kij}^{-2}(\theta)\phi_\alpha(\mathbf{y})J(\mathbf{y}) + S_{kij}^{-3}(\theta)(\phi_\alpha(\mathbf{y})dJ(\theta) + d\Phi(\theta)J(\mathbf{y})) \right]. \quad (2.100)$$

Итак, мы получили два первых члена K_{ij}^{-3} и K_{ij}^{-2} разложения подынтегрального выражения K_{ij} (2.49) в ряд по локальной координате ρ .

В дуальном МГЭ используются два граничных интегральных уравнения: ГИУС (2.40) на S^* и ГИУН (2.41) на S^- . Они образуют замкнутую систему интегральных уравнений относительно u_i на S^* и Δu_i на S^- . Из них находится раскрытие трещины (2.34). Аппроксимация S^+ не требуется. После аппроксимации граничными элементами уравнений (2.40) и (2.41) получается СЛАУ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^* - \frac{1}{2}\mathbf{I} & \mathbf{t}_2^* \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* & 0 \\ \mathbf{L}_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}, \quad (2.101)$$

в которой верхняя часть отвечает за смещения \mathbf{u} и напряжения \mathbf{t} на границе полости S^* , а нижняя часть – за разрыв смещений $\Delta \mathbf{u}$ и напряжения \mathbf{t} на поверхности трещины S^- .

Следует отметить, что мы привели оригинальную модификацию ДМГЭ, в которой используются ГИУС и ГИУН, записанные относительно открытия трещины (разрыва смещений на трещине) только на одной стороне разрыва и смещений на поверхности полости. Эта модификация значительно уменьшила количество вычислений, поскольку не требуется аппроксимация другой стороны разрыва. Также в книге ДМГЭ впервые применяется для решения трехмерной задачи гидроразрыва, в которой присутствует полость, от которой распространяется трещина под действием закачиваемой вязкой жидкости. В работах [8, 10, 11, 15] рассмотрены изолированные трещины, нагруженные закачиваемой через точечный источник вязкой жидкостью. В других работах рассматривается только квазистатическое распространение трещины.

Сложностями использования ДМГЭ по сравнению с классическим МГЭ являются высокая степень сингулярности ГИУН и увеличение вычислительных затрат из-за необходимости использовать разрывные граничные элементы, что приводит к увеличению степеней свободы и, как результат, к увеличению размерности матрицы в СЛАУ.

2.2.6. Классический МГЭ с модификацией расчетной области

Как отмечалось в разделе 2.2.1 классический МГЭ в его исходном виде не может применяться для решения задач с трещи-

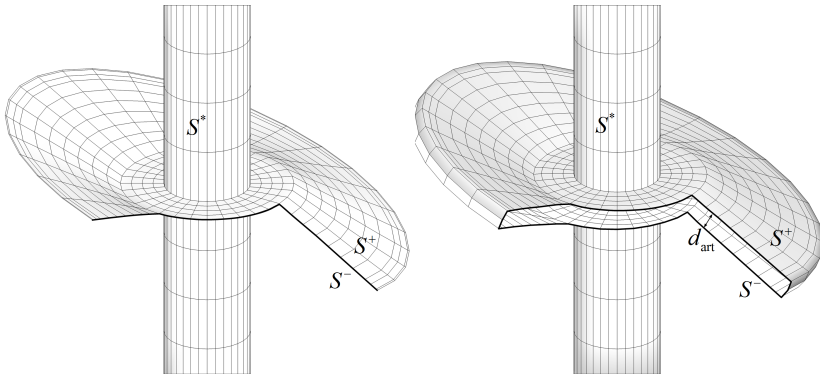


Рис. 2.11. Приближение реальной трещины (слева) виртуальным пропилом конечной ширины (справа).

ной, так как два берега трещины находятся бесконечно близко друг от друга, что приводит к вырождению уравнений. Обычно для описания трещин используются модификации МГЭ, такие как многозонный МГЭ (см. 2.2.2), метод разрывных смещений (см. § 2.2.3) или дуальный МГЭ (см. § 2.2.5).

Тем не менее, использование классического МГЭ для решения задач с трещинами возможно. Так, в работе [18] авторами монографии был предложен другой подход, который позволяет использовать классический МГЭ для решения задач с трещинами путем модификации расчетной области. В этом подходе исходная реальная трещина заменяется виртуальным пропилом конечной ширины d_{art} , как показано на рис. 2.11. С одной стороны, величина искусственного параметра d_{art} должна выбираться достаточно малой, чтобы минимизировать погрешность, вносимую модификацией области. С другой, точки коллокации на противостоящих берегах трещины должны располагаться достаточно далеко друг от друга, чтобы сохранить хорошую обусловленность системы линейных уравнений и минимизировать численные ошибки при расчете ширины трещины и коэффициентов интенсивности напряжений. Исследование вопроса выбора величины такого пропила и оценка величины погрешности, вносимой модификацией области, будут описаны в § 2.5.2.

Классический МГЭ с модификацией области (МГЭ/МО) имеет некоторое преимущество по сравнению с дуальным МГЭ

и методом разрывных смещений с точки зрения вычислительной сложности. Для примера рассмотрим задачу, в которой содержится полость, покрытая расчетной сеткой из N_c элементов, и трещина, покрытая расчетной сеткой N_f . Как было сказано выше, для дискретизации гиперсингулярного ГИУН должны использоваться разрывные элементы, а для аппроксимации ГИУС могут использоваться непрерывные элементы. Оценим число степеней свободы в СЛАУ, генерируемой каждым из методов, для случая использования простейших линейных элементов. При применении МРС получившаяся СЛАУ будет содержать $3(4N_f + 4N_c)$ степеней свободы, при использовании дуального МГЭ — $3(4N_f + N_c)$, а классический МГЭ с модификацией области даст систему с $3(2N_f + N_c)$ степенями свободы. На основании приведенной оценки можно сделать вывод, что МГЭ/МО является наиболее подходящим для описания трещин с точки зрения экономичности, особенно если размер трещины и количество покрывающих ее элементов N_f значительны. Тем не менее, следует помнить, что модификация области вносит некоторую погрешность в решение задачи.

2.2.7. Специальные элементы у фронта трещины

Решение уравнений упругого равновесия в общем случае имеет особую точку в окрестности фронта трещины. Так, напряжения в окрестности фронта трещины стремятся к бесконечности. В описанных выше МГЭ смещения и напряжения аппроксимируются линейными или квадратичными функциями, которые не позволяют точно описывать функции с особыми точками. Для учета этой особенности решения целесообразно использовать специальные элементы в окрестности фронта трещины. Рассмотрим их применение на примере дуального МГЭ.

В дуальном МГЭ вся граница области $S = S^* + S^-$ аппроксимируется разрывными граничными элементами. На каждом граничном элементе S^e вводится локальная система координат (ξ_1, ξ_2) (рис. 2.12), а неизвестные функции аппроксимируются линейной комбинацией формфункций (2.15). Чаще всего используются полиномиальные формфункции вида

$$\phi^\alpha(\xi_1, \xi_2) = F_{N_1}^\alpha(\xi_1) \cdot F_{N_2}^\alpha(\xi_2), \quad (2.102)$$

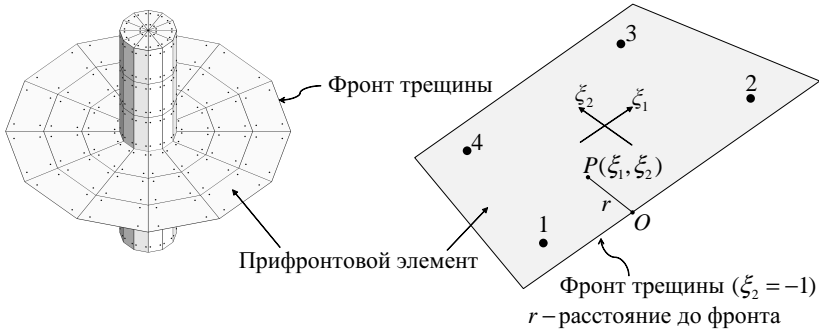


Рис. 2.12. Разбиение границы S на разрывные 4-точечные граничные элементы S^e (слева) и параметризация (ξ_1, ξ_2) специального прифронтного элемента (справа).

где $F_{N1}^\alpha(\xi_1)$ и $F_{N2}^\alpha(\xi_2)$ – полиномы по переменным ξ_1 и ξ_2 соответственно, имеющие порядок N . Для дуального МГЭ рассмотрим разрывные элементы первого порядка ($N = 1$)

$$\phi^\alpha(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{a_1^2 - \xi_1}{a_1^2 - a_1^1} \right) \cdot \left(\frac{a_2^2 - \xi_2}{a_2^2 - a_2^1} \right), \quad (2.103)$$

и второго порядка ($N = 2$)

$$\phi^\alpha(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{a_1^2 - \xi_1}{a_1^2 - a_1^1} \cdot \frac{a_1^3 - \xi_1}{a_1^3 - a_1^1} \right) \cdot \left(\frac{a_2^2 - \xi_2}{a_2^2 - a_2^1} \cdot \frac{a_2^3 - \xi_2}{a_2^3 - a_2^1} \right), \quad (2.104)$$

где a_i^j есть некоторые постоянные, отвечающие за положения узлов в элементе [19].

Рассмотрим поведение формфункций и решения в окрестности фронта. Фронт трещины в координатной системе прифронтного элемента (см. рис. 2.12, справа) имеет координаты $\xi_1 \in [-1; 1]$, $\xi_2 = -1$. Расстояние от произвольной точки P с координатами (ξ_1, ξ_2) до фронта трещины есть $r = 1 + \xi_2$. Перепишем формфункции (2.103) в терминах расстояния r

$$\phi^\alpha(\xi_1, r) = F_{N1}^\alpha(\xi_1) \cdot (A_0^\alpha + A_1^\alpha r). \quad (2.105)$$

В то же время согласно [134] разрыв смещений $\Delta \mathbf{u}$ в окрестности фронта трещины представляется в виде разложения по параметру r

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{a}_{1/2} \sqrt{r} + \mathbf{a}_{3/2} r^{3/2} + O(r^{5/2}), \quad (2.106)$$

в котором главный член пропорционален \sqrt{r} . В выражении для разрыва смещений (2.43) с базисом (2.105) он отсутствует. Для того чтобы в (2.43) получить главный член разложения такой же, как и в (2.106), вместо формфункций (2.103) в прифронтных элементах будем использовать функции

$$\phi^\alpha(\xi_1, r) = \left(\frac{a_1^2 - \xi_1}{a_1^2 - a_1^1} \right) \cdot \left(\frac{F(a_2^2) - \sqrt{r}}{F(a_2^2) - F(a_2^1)} \right), \quad (2.107)$$

а вместо (2.104) функции [131]

$$\begin{aligned} \phi^\alpha(\xi_1, r) = & \left(\frac{a_1^2 - \xi_1}{a_1^2 - a_1^1} \cdot \frac{a_1^3 - \xi_1}{a_1^3 - a_1^1} \right) \times \\ & \times \left(\frac{F(a_2^2) - \sqrt{r}}{F(a_2^2) - F(a_2^1)} \cdot \frac{F(a_2^3) - \sqrt{r}}{F(a_2^3) - F(a_2^1)} \right), \end{aligned} \quad (2.108)$$

где $F(a_2^j) = \sqrt{1 + a_2^j}$, $s = F(\xi_2)$, $p = F(\lambda)$, $q = F(-\lambda)$. При таком задании $\phi^\alpha(\xi_1, \xi_2)$ в представление разрыва смещений по (2.43) войдет главный член разложения, пропорциональный \sqrt{r} , такой же как в разложении разрыва смещений $\Delta \mathbf{u}$. Заметим, что разложение (2.106) в локальной системе координат выполнено в предположении, что геометрия элемента $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)$ линейно зависит от r .

Применение специальных элементов особенно эффективно при необходимости описывать НДС материала в окрестности фронта трещины, в частности, при расчете коэффициентов интенсивности напряжений (см. 2.4). Эффективность использования специальных элементов при решении таких задач будет показана в § 2.5.4.

2.2.8. Вычисление тензора напряжений на поверхности задачи

Отметим, что для вычисления тензора напряжений на границе нельзя непосредственно воспользоваться фундаментальным интегральным соотношением для напряжений (2.13), так как при стремлении точки наблюдения к поверхности интегралы в правой части выражения вырождаются. Однако, на всей поверхности тела после решения задачи упругости известны смещения; дифференцируя их и используя в локальной системе

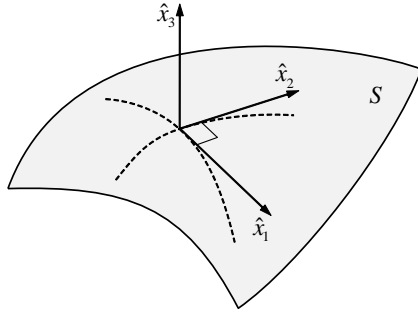


Рис. 2.13. Локальная ортогональная система, связанная с элементом.

координат закон Гука, можно получить тензор напряжений на границе.

Тензор напряжений в ортогональной локальной системе координат \hat{x}_i , связанной с элементом, как изображено на рис. 2.13 (в случае четырехугольных элементов рисунок аналогичен), может быть вычислен при помощи закона Гука:

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu}(\nu \hat{t}_3 + 2\mu(\hat{\varepsilon}_1 1 + \nu \hat{\varepsilon}_2 2)), \\
 \hat{\sigma}_{12} &= 2\mu \hat{\varepsilon}_1 2, \\
 \hat{\sigma}_{22} &= \frac{1}{1-\nu}(\nu \hat{t}_3 + 2\mu(\hat{\varepsilon}_2 2 + \nu \hat{\varepsilon}_1 1)), \\
 \hat{\sigma}_{3i} &= \hat{t}_i.
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

Деформации в локальной ортогональной системе координат находятся по формулам

$$\begin{aligned}
 \hat{\varepsilon}_{11} &= \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_1} = \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \hat{x}_1}, \\
 \hat{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_1} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \hat{x}_1} \right), \\
 \hat{\varepsilon}_{22} &= \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_2} = \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \hat{x}_2}.
 \end{aligned} \tag{2.110}$$

Используя несложные геометрические соображения, можно получить:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_1}{\partial \hat{x}_1} &= 1, & \frac{\partial \xi_1}{\partial \hat{x}_2} &= \cos \theta, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial \hat{x}_1} &= 0, & \frac{\partial \xi_2}{\partial \hat{x}_2} &= \sin \theta.\end{aligned}\tag{2.111}$$

Угол θ определяется очевидным образом из скалярного произведения ортов ξ_1 и ξ_2 . Компоненты смещений u_i и напряжений t_i на границе определяются из соотношений (2.15). Далее применяя преобразование координат, можно получить векторы \hat{u}_i и \hat{t}_i .

Преобразуя тензор напряжений $\hat{\sigma}_{ij}$ из локальной системы координат в глобальную, получим значение тензора напряжений на границе σ_{ij} .

2.3. Примеры расчета НДС

Для верификации предлагаемого метода расчета напряженно-деформированного состояния твердого тела найдены решения модельных задач и проведены их сравнения с известными решениями, в том числе полученными из теории сопротивления материалов.

В целях проверки порядка сходимости и качества аппроксимации функций на элементах была решена задача о консольной балке. Для проверки моделирования многозонных задач была решена задача о составной трубе, нагруженной изнутри постоянным давлением.

2.3.1. Задача о консольной балке

Рассматривается балка квадратного сечения, нагруженная сверху давлением $P = 1$ МПа. Геометрические параметры балки: длина $L = 640$ мм, сторона квадрата $a = 64$ мм. Материал, из которого сделана балка, имеет следующие характеристики: модуль Юнга $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, что соответствует стали. Левый торец стержня зацемлен. Остальные поверхности стержня свободны от напряжений, как показано на рис. 2.14.

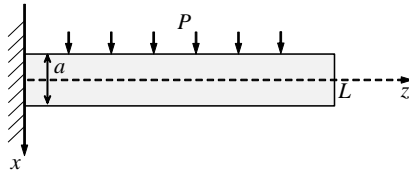


Рис. 2.14. Задача о консольной балке.

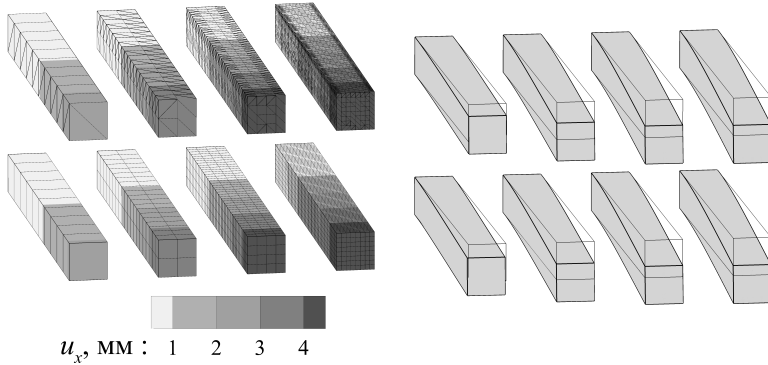


Рис. 2.15. Вертикальные смещения u_x (слева) и изменение формы балок (масштаб смещений увеличен в 10 раз; справа).

Результаты проведенных расчетов на двух последовательностях сеток представлены на рис. 2.15. В первой последовательности сетки состоят из 42, 168, 672, 2688 четырехугольных билинейных разрывных элементов с показателем $\lambda = 0.7$ (нижний ряд на рис. 2.15; обозначим такие элементы Q). Во второй последовательности сетки состоят из 84, 336, 1344, 5376 треугольных линейных разрывных элементов с показателем $\lambda = 0.7$ (верхний ряд на рис. 2.15; обозначим такие элементы T).

Аналитическое решение (из теории балок, см. например [135]) для осевой линии балки

$$u_x(z) = \frac{Pa}{24EI}(z^2 - 4Lz + 6L^2)z^2. \quad (2.112)$$

Здесь I – главный момент инерции, который равен $I = \frac{a^4}{12}$. Сравнение проводилось для точки $z = L$, в которой смещение по x равно $u_x(L) = \frac{1}{8} \frac{PaL^4}{EI}$. В табл. 2.1 представлены погреш-

Таблица 2.1. Вертикальные смещения $u_x(L)$

Количество и тип граничных элементов	Аналитическое решение, мм	Численное решение, мм	Относительная ошибка, %
42 Q	4.8	2.45	48.95
168 Q	4.8	3.60	25.00
672 Q	4.8	4.26	11.25
2688 Q	4.8	4.56	5.00
84 T	4.8	2.41	49.79
336 T	4.8	3.55	26.04
1344 T	4.8	4.24	11.66
5376 T	4.8	4.54	5.41

ности решений, полученные на рассмотренных последовательностях сеток. Хорошо видно, что достигнут первый порядок сходимости метода при аппроксимации каждым из типов разрывных элементов.

2.3.2. Задача о составной трубе

Работу многозонного метода граничных элементов, описанного в 2.2.2, можно продемонстрировать на задаче о составной трубе, нагруженной давлением. Рассмотрим две круглых трубы одинаковой длины $L = 10$ м, плотно вставленных друг в друга, как изображено на рис. 2.16. Внутренняя труба имеет внутренний радиус $a = 5$ м, наружный $b = 8$ м. Внешняя труба имеет внутренний радиус $b = 8$ м, наружный $c = 10$ м. Внутренняя труба сделана из материала 1 с параметрами $E_1 = 25$ Па, $\nu = 0.25$ (соответственно коэффициенты Ламэ $\lambda_1 = 10$ Па, $\mu_1 = 10$ Па). Внешняя труба сделана из материала 2 с параметрами $E_1 = 50$ Па, $\nu = 0.25$ (соответственно коэффициенты Ламэ $\lambda_1 = 20$ Па, $\mu_1 = 20$ Па).

Внутренняя сторона внутренней трубы нагружена постоянным давлением $p = 1$ Па. Внешняя сторона внешней трубы свободна от напряжений, а торцевые концы труб свободно оперты.

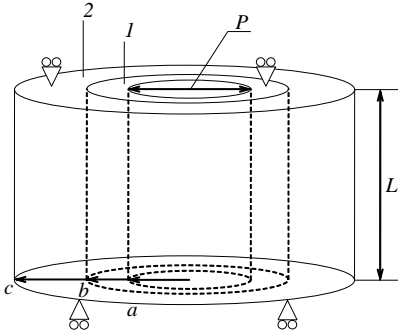


Рис. 2.16. Задача о составной трубе.

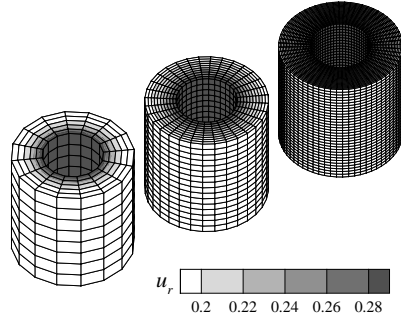


Рис. 2.17. Радиальные смещения u_r .

Результаты проведенных расчетов на последовательности сеток представлены на рис. 2.17. Сетки состоят из 672, 2688, 10752 разрывных элементов с показателем $\lambda = 0.7$.

В целях получения точного решения воспользуемся для каждой из труб решением задачи Ламэ для цилиндрической трубы [136]. Затем, приравнивая смещения наружной поверхности внутренней трубы смещениям внутренней поверхности внешней трубы, получаем давление, с которым одна труба давит на другую:

$$p_0 = p \frac{A}{B + C}, \quad (2.113)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 b}{2(b^2 - a^2)} \frac{2\mu_1 + \lambda_1}{\mu_1(\mu_1 + \lambda_1)}, \\ B &= \frac{b}{2(b^2 - a^2)} \frac{\mu_1(a^2 + b^2) + \lambda_1 a^2}{\mu_1(\mu_1 + \lambda_1)}, \\ C &= \frac{b}{2(c^2 - b^2)} \frac{\mu_2(b^2 + c^2) + \lambda_2 c^2}{\mu_2(\mu_2 + \lambda_2)}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Это давление используется для вычисления значения радиальных смещений u_r наружной поверхности внешней трубы

$$u_r(c) = \frac{b^2 c p_0}{2(c^2 - b^2)} \frac{2\mu_2 + \lambda_2}{\mu_2(\mu_2 + \lambda_2)}, \quad (2.115)$$

Таблица 2.2. Радиальные смещения $u_r(c)$

Количество и тип граничных элементов	Аналитическое решение, мм	Численное решение, мм	Относительная ошибка, %
672	0.19455	0.17715	8.94
2688	0.19455	0.18994	2.36
10752	0.19455	0.19339	0.59

которое и было использовано для сравнения. В табл. 2.2 представлены погрешности решений, полученные на рассмотренной последовательности сеток.

Как и в предыдущей задаче, показан первый порядок сходимости. Получилась невысокая погрешность на достаточно грубых сетках.

2.4. Коэффициенты интенсивности напряжений и особенности их вычисления

Для механики разрушения большой интерес представляет изучение асимптотического распределения напряжений, деформаций и смещений в окрестности фронта трещины. НДС материала в малой окрестности произвольно фиксированной точки на фронте трещины, расположенной в однородном изотропном упругом теле, полностью характеризуется тремя коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) K_I , K_{II} , K_{III} [63, 137]. Так, компоненты вектора смещений зависят от КИН и расстояния r от кончика трещины следующим образом:

$$u_n = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left((1 - 2\nu) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(2(1 - \nu) + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] + \dots,$$

$$\begin{aligned}
u_b &= \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[K_{\text{I}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2(1 - \nu) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - K_{\text{II}} \cos \frac{\theta}{2} \left((1 - 2\nu) - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] + \dots, \\
u_t &= \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_{\text{III}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots,
\end{aligned} \tag{2.116}$$

а компоненты тензора напряжений выражаются как [138, 139]

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \\
&\quad - \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \dots, \\
\sigma_{nb} &= \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \\
&\quad - \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots, \\
\sigma_b &= \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \\
&\quad - \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots, \\
\sigma_{nt} &= - \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots, \\
\sigma_{bt} &= \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + \dots, \\
\sigma_t &= 2\nu \left(\frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{2.117}$$

В простых случаях, таких как плоская прямая или круговая трещина, КИН могут быть посчитаны аналитически, но в общем случае их значения необходимо вычислять по рассчитанному каким-либо методом НДС в окрестности фронта трещины. В следующем параграфе будет приведен обзор таких методов.

2.4.1. Обзор способов вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для плоской трещины

Способы вычисления КИН условно можно разделить на три группы: интерполяция по значениям разрывов смещений на трещине в окрестности кончика, интерполяция по значениям напряжений внутри расчетной области в окрестности кончика и основанные на интегральных соотношениях.

Первая группа вычисления КИН основывается на представлении компонент смещений в окрестности кончика плоской трещины (2.116). Используя это выражение, выпишем значения разрывов смещений на берегах трещины в локальной системе координат, связанной с кончиком трещины:

$$\begin{aligned}u_n(\theta = \pi) - u_n(\theta = -\pi) &= \frac{8(1 - \nu^2)}{E} K_{\text{I}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}, \\u_b(\theta = \pi) - u_b(\theta = -\pi) &= \frac{8(1 - \nu^2)}{E} K_{\text{II}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}, \\u_t(\theta = \pi) - u_t(\theta = -\pi) &= \frac{8(1 + \nu)}{E} K_{\text{III}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}.\end{aligned}\quad (2.118)$$

Очевидно, что применение формул (2.118) непосредственно в кончике или близко к нему не даст значения КИН. Поэтому предлагается рассматривать несколько точек вдали от кончика на трещине и интерполировать значения КИН из них в кончик. На сегодня предложено большое количество таких методов [140–142]. Однако такой подход обладает существенным недостатком — требует максимально точного воспроизведения поведения компонент смещений u_i у кончика трещины и требует применения специального граничного элемента у кончика трещины. Как показывает практика, особенно на сильно изогнутых трещинах, погрешность определения K_{II} получается излишне высокой.

Вторая группа вычисления КИН основывается на представлении компонент тензора напряжений в окрестности кончика плоской трещины (2.117). В двумерном случае смещения в локальной системе координат, связанной с кончиком, ведут себя следующим образом (2.116) [137]. В таких подходах для верного вычисления КИН требуется получить достаточно точное

решение задачи упругости в теле в окрестности кончика трещины. При этом непосредственное восстановление асимптотических коэффициентов затруднено.

Интегральные способы основываются на различных либо контурных, либо объемных интегралах, вычисляемых в некоторой окрестности кончика. Как правило, эти интегралы с другой стороны выражаются некоторым образом через значения обоих КИНов. Наиболее известным является способ, основанный на вычислении J -интеграла. Такой способ требует применения специальной техники для вычисления сразу всех значений КИНов, которая в трехмерном случае излишне громоздка. Опишем эту технику подробно для случая двумерной трещины.

Метод вычисления значения КИНов на основе J -интеграла в двумерном случае

Метод вычисления КИНов при помощи J -интеграла, который вычисляет скорость выделения энергии деформации при изменении длины трещины [143, 144], не требует специального представления сингулярного поля напряжений в окрестности кончика трещины. Рассмотрим J -интеграл в локальной системе координат, связанной с прямолинейным элементом у конца трещины D :

$$J = \oint_{ABCD} (Wn_1 - \sigma_{ij}n_i u_{j,1}) dS, \quad (2.119)$$

где контур интегрирования $ABCD$ включает кончик трещины, как показано на рис. 2.18. Здесь W — плотность энергии деформации, n_i — компоненты единичной нормали к контуру интегрирования. Включение контура CDA в контур интегрирования для J -интеграла необходимо ввиду того, что граничный элемент на кончике трещины согласно (2.22) нагружен напряжениями. Часть контура ABC имеет форму окружности, охватывающей граничный элемент у конца трещины.

С другой стороны, J -интеграл равен [143, 144]

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'}. \quad (2.120)$$

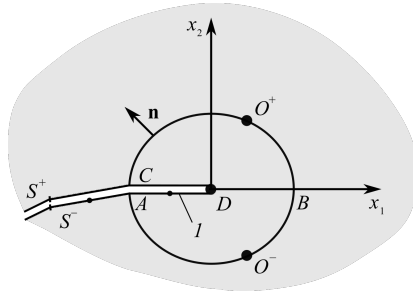


Рис. 2.18. Контур интегрирования для J -интеграла: I — граничный элемент у кончика трещины.

Однако, непосредственно J -интеграл не применим для вычисления сразу пары K_I и K_{II} . Поэтому для разделения суммы в формуле (2.120) предлагается выделить симметричную (I) и антисимметричную (II) [145, 146] составляющие смещений (деформаций)

$$\begin{bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1^+ + u_1^- \\ u_2^+ - u_2^- \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1^{II} \\ u_2^{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1^+ - u_1^- \\ u_2^+ + u_2^- \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

и напряжений

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^I \\ \sigma_{22}^I \\ \sigma_{12}^I \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^- \\ \sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^- \\ \sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^- \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^{II} \\ \sigma_{12}^{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^- \\ \sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^- \\ \sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^- \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

в окрестности кончика трещины. Здесь значение величины $(\cdot)^+$ вычисляется в точке O^+ , лежащей на контуре $ABCD$, а значение величины $(\cdot)^-$ вычисляется в симметричной относительно оси x_1 точке O^- , также лежащей на контуре $ABCD$ (см. рис. 2.18). Тогда J -интеграл распадается на две части [145, 146]

$$\begin{aligned} J = J^I + J^{II} = & 2 \int_{BCD} (W^I n_1 - \sigma_{ij}^I n_i u_{j,1}^I) dS + \\ & + 2 \int_{BCD} (W^{II} n_1 - \sigma_{ij}^{II} n_i u_{j,1}^{II}) dS. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Здесь симметричная и антисимметричная плотности энергии деформации для гуковской среды вычисляются по следующим формулам:

$$W^I = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^I, \quad W^{II} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{II} \varepsilon_{ij}^{II}. \quad (2.124)$$

С другой стороны J^I и J^{II} [145, 146] равны

$$J^I = \frac{K_I^2}{E'}, \quad J^{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}. \quad (2.125)$$

Интегрируя с помощью квадратуры Гаусса по части контура BC и с помощью формулы прямоугольников по части контура CD определяем величины J^I и J^{II} , из которых затем находим K_I и K_{II} . Отметим, что для вычисления значений σ_{ij} и u_i на контуре интегрирования ABC в дуальном МГЭ используются соответствующие фундаментальные интегральные соотношения (2.10) и (2.12).

2.4.2. Интерполяционные формулы для расчета КИН на фронте трехмерной трещины

Как было сказано выше, в трехмерном случае смещения определяются тремя значениями K_I , K_{II} , K_{III} (2.116). Метод расчета значений КИН по значениям смещений на берегах трещины описан, например, в [130]:

$$\begin{aligned} K_I^O &= \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_b^{P^+} - u_b^{P^-}), \\ K_{II}^O &= \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_n^{P^+} - u_n^{P^-}), \\ K_{III}^O &= \frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_t^{P^+} - u_t^{P^-}), \end{aligned} \quad (2.126)$$

где точка O находится на фронте трещины; векторы \mathbf{u}^{P^+} и \mathbf{u}^{P^-} есть смещения в точках P^+ и P^- , лежащих на верхнем и нижнем берегах трещины соответственно; u_b , u_n и u_t – проекции векторов \mathbf{u} на координатные оси локальной системы координат, показанной на рис. 2.19; r – расстояние до фронта трещины.

Предложим модификацию формулы для расчета КИН в точке фронта O , использующую смещения не в одной, а в двух точках трещины

$$K^O = K^2 + \frac{r_2(K^1 - K^2)}{r_2 - r_1}, \quad (2.127)$$

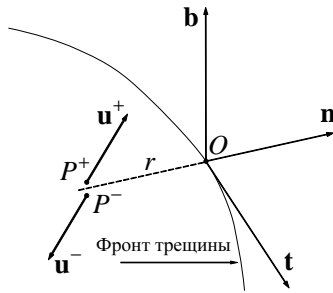


Рис. 2.19. Расчет КИН по смещениям в точках на берегах трещины.

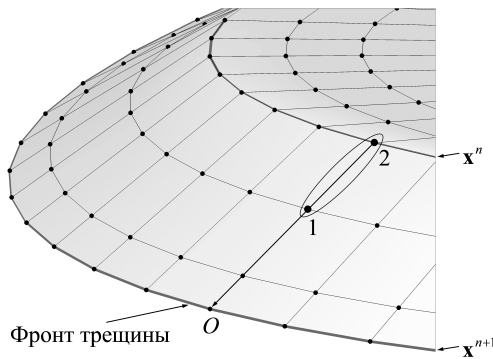


Рис. 2.20. Расположение вспомогательных точек на трещине для двухточечной формулы расчета КИН.

где K^1 и K^2 — значение каждого из трех КИН, рассчитанное по формуле (2.126) в точках 1 и 2 трещины, как показано на рис. 2.20. Сравнение интерполяционных формул (2.126) и (2.127) и рекомендации по выбору положения точек 1 и 2 для формулы (2.127) будут приведены в следующем разделе (§ 2.5.1).

2.5. Верификация методов расчета КИН на задаче о наклонной трещине

2.5.1. Постановка задачи о наклонной трещине

Рассмотрим плоскую круговую трещину радиуса R , с берегами верхним — S^+ и нижним — S^- , центр которой расположен в начале координат. Трещина лежит в плоскости, наклонен-

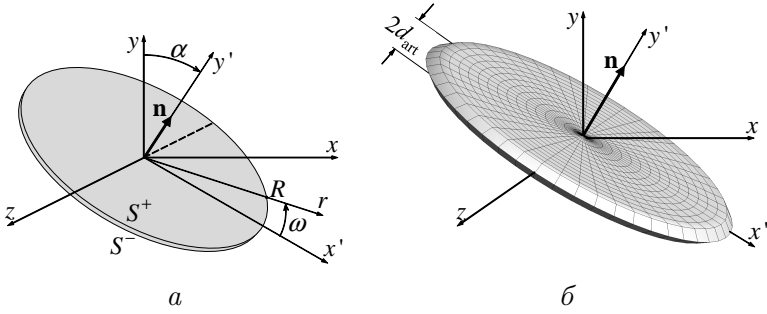


Рис. 2.21. Задача о круговой трещине в материале, растягиваемом в направлении y : a — бесконечно тонкая трещина в плоскости, повернутой относительно оси Oz на угол α ; b — круговой пропила ширины $2d_{art}$ с заостренным кончиком, расположенный в той же плоскости.

ной на угол α к оси Oz (рис. 2.21, a). Материал растягивается на бесконечности напряжениями, задаваемыми тензором σ^∞ с главными компонентами $\sigma_x^\infty = \sigma_z^\infty = 0$, $\sigma_y^\infty > 0$. Напряжения на берегах трещины заданы равными нулю $\sigma \cdot \mathbf{n}|_{S^\pm} = 0$.

Точные значения КИН могут быть найдены, например, в [147, 148]:

$$K_I = 2\sigma_y^\infty \cos^2 \alpha \sqrt{\frac{R}{\pi}}, \quad (2.128)$$

$$K_{II} = \frac{4}{2-\nu} \sigma_y^\infty \sin \alpha \cos \alpha \cos \omega \sqrt{\frac{R}{\pi}}, \quad (2.129)$$

$$K_{III} = \frac{4(1-\nu)}{2-\nu} \sigma_y^\infty \sin \alpha \cos \alpha \sin \omega \sqrt{\frac{R}{\pi}}, \quad (2.130)$$

где ω — круговая координата вдоль фронта трещины, определяющая положение рассматриваемой точки на фронте.

Выражение для ширины трещины имеет вид [5, 149]

$$W(r) = \sigma \cos^2 \alpha \frac{8(1-\nu^2)}{\pi E} \sqrt{R^2 - r^2}, \quad (2.131)$$

где W — ширина трещины, рассчитываемая по формуле $W(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^+(\mathbf{x}^+) \mathbf{n}^+(\mathbf{x}^+) + \mathbf{u}^-(\mathbf{x}^-) \mathbf{n}^-(\mathbf{x}^-)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\pm \in S^\pm$ (см. рис. 2.11).

2.5.2. Выбор ширины пропила при использовании МГЭ с модификацией области

Для выработки рекомендаций по выбору ширины искусственного пропила d_{art} при использовании МГЭ с модификацией области (§ 2.2.6) проведем серию расчетов ширины трещины и КИН при использовании различных сеток и значений d_{art} . Использовались расчетные сетки: $C1$ с $N_r = 4$ элементами в радиальном направлении и с $N_c = 16$ в окружном, $C2$ с $N_r = 8$, $N_c = 32$, $C3$ с $N_r = 16$, $N_c = 64$ и $C4$ с $N_r = 32$ и $N_c = 128$. Ширина пропила варьировалась в интервале $0.1d_e \leq d_{\text{art}} \leq 0.64R$, где $d_e = \pi R/2$ — максимальный размер элемента. Радиус трещины был выбран $R = 1$ м, растяжения на бесконечности равны $\sigma_y^\infty = 1$ МПа, параметры материала $E = 20$ ГПа, $\nu = 0.2$.

На рис. 2.22 приведена погрешность при численном расчете ширины трещины

$$\varepsilon_W = \frac{\|W_{\text{ex}} - W_{\text{num}}\|}{\|W_{\text{ex}}\|} \quad (2.132)$$

в зависимости как от величины пропила, отнесенной к размеру трещины d_{art}/R , так и от величины пропила, отнесенной к размеру максимального элемента d_{art}/d_e . Величина погрешности определяется двумя составляющими: погрешностью, вызванной модификацией области, и погрешностью, связанной с ухудшением обусловленности СЛАУ из-за близости точек коллокации друг к другу. Вторая составляющая должна становиться более заметной при малых значениях d_{art} . Действительно, погрешность резко возрастает при уменьшении величины пропила. На рис. 2.22 (справа) можно заметить, что эта часть погрешности зависит не от абсолютного значения величины пропила, а от отношения величины пропила к размеру элемента d_{art}/d_e , так как возрастание погрешности происходит при одной и той же величине $0.1d_e \leq d_{\text{art}}$. Погрешность, обусловленная модификацией области, тем больше, чем больше пропила по отношению к размеру трещины. Минимум относительной погрешности находится в интервале $0.25d_e \leq d_{\text{art}} \leq 0.3R$ и составляет 22 % для грубой сетки, 13 % для средней и 7 % для мелкой, что говорит о снижении порядка сходимости метода до первого при решении задач с трещиной.

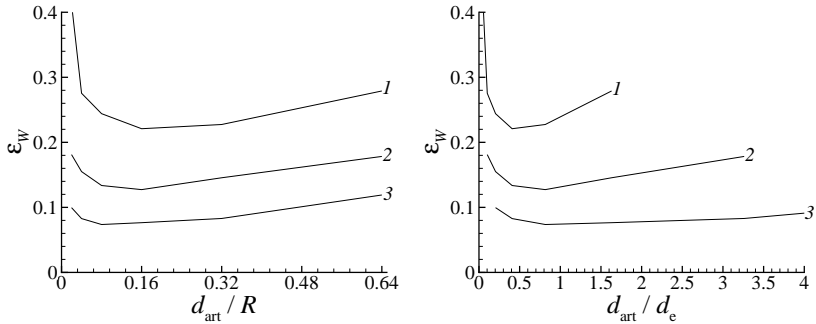


Рис. 2.22. Относительная погрешность при расчете ширины трещины в зависимости от ширины пропила, отнесенной к размеру трещины (слева) и размеру максимального элемента (справа), полученная на различных сетках: 1 — C1; 2 — C2; 3 — C3.

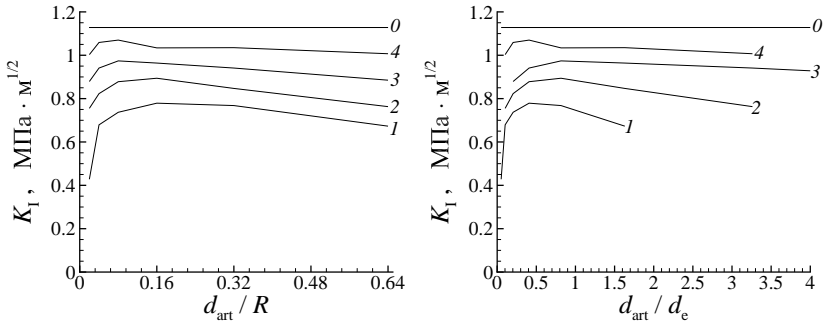


Рис. 2.23. КИН моды I в зависимости от ширины пропила, отнесенной к размеру трещины (слева) и размеру максимального элемента (справа), полученный на различных сетках: 1 — C1; 2 — C2; 3 — C3; 4 — C4.

На рис. 2.23 приведено значение первой моды КИН в зависимости от относительных величин пропила d_{art}/R и d_{art}/d_e . Приведены значения точного значения КИН и рассчитанного по простой интерполяционной формуле (2.19). Минимальная погрешность для сетки C1 составляет 38 %, для сетки C2 – 25 %, C3 – 18 %, C4 – 10 %, что соответствует сходимости метода расчета КИН с порядком меньше первого. При расчете КИН погрешность вызвана не только модификацией области и ухудшением обусловленности СЛАУ, но и погрешностью самой формулы (2.19). Поэтому, во-первых, точность расчета КИН

значительно ниже точности расчета ширины трещины и, во-вторых, влияние модификации области на фоне последней составляющей погрешности менее заметно. Ухудшение обусловленности СЛАУ вносит существенную погрешность, поэтому ее влияние одинаково и при расчете ширины трещины, и при расчете КИН.

На основании проведенных расчетов можно сделать вывод, что нижняя граница допустимого интервала выбора величины искусственного пропила определяется размером элемента $0.25d_e \leq d_{art}$, а верхняя – размером области $d_{art} \leq 0.3R$.

2.5.3. Сравнение точности интерполяционных формул

Как видно из рис. 2.23, расчет КИН по одноточечной формуле (2.126) вносит существенную погрешность. Здесь покажем причины такой погрешности и как двухточечная формула помогает ее уменьшить. На рис. 2.24 приведена ширина трещины, численно рассчитанная МГЭ с модификацией области (см. § 2.2.6, рис. 2.21, б) с параметрами $\alpha = 0$, $R = 1$ м, $\sigma_y^\infty = 1$ МПа, $E = 20$ ГПа, $\nu = 0.2$. Там же приведена ширина трещины, рассчитанная по формуле (2.131). Расчетная сетка состояла из $N_r = 16$ элементов в радиальном направлении и $N_c = 64$ элементов в окружном направлении. Ширина искусственного пропила составляла $d_{art} = 0.12$ м.

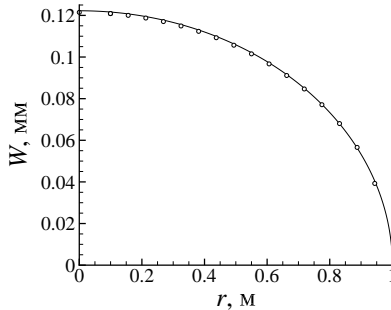


Рис. 2.24. Ширина трещины: точное решение (2.131) (сплошная линия); МГЭ с модификацией области $d_{art} = 0.12$ м (точки).

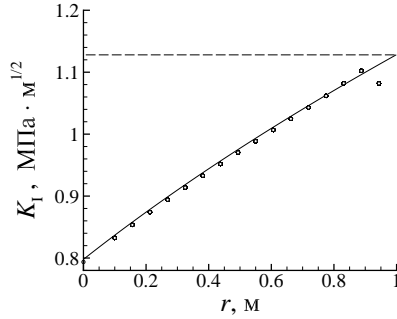


Рис. 2.25. Зависимость КИН K_I от положения точки, по которой посчитано его значение: аналитическое решение (2.128) при $\alpha = 0$ (штриховая); формула (2.126), смещения рассчитаны по формуле (2.131) (сплошная); численное решение МГЭ с модификацией области при $d_{art} = 0.12$ м (точки).

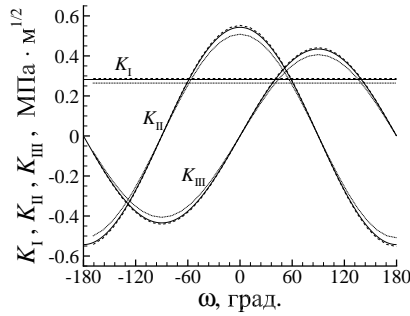


Рис. 2.26. Распределения КИН вдоль фронта наклоненной на 45° трещины, полученные из точного решения (сплошные линии), МГЭ/МО с $d_{art} = 0.12$ м с однотоочечной формулой (2.126) (пунктир) и МГЭ/МО с $d_{art} = 0.12$ м с двухточечной формулой (2.127) (штриховые).

Рассмотрим влияние точности расчета смещений на величину K_I . На рис. 2.25 показаны значения K_I , рассчитанные по формуле (2.126) при указанных выше параметрах в точках трещины, расположенных вдоль радиальной координаты на различных расстояниях от фронта трещины. Приведены смещения, рассчитанные как численно при $d_{art} = 0.12$ м, так и аналитически, по формуле (2.128). Видно, что точность формулы (2.126) для расчета K_I снижается в последних трех точках около фронта трещины. Поэтому формула (2.127), использующая для расчета КИН значения смещений в удаленных от фронта

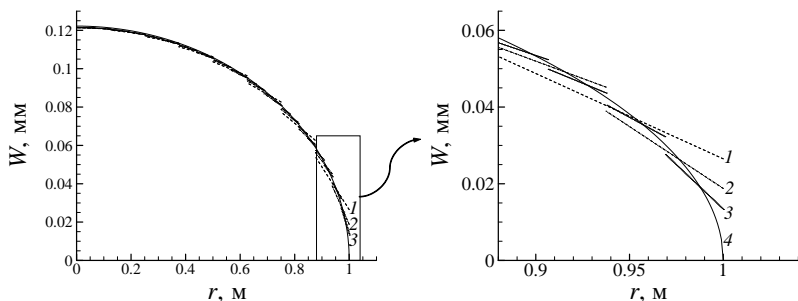


Рис. 2.27. Распределения ширины трещины W вдоль радиальной координаты r по всему радиусу (слева) и в окрестности фронта трещины (справа): 1 — $N_c = 32$, $N_r = 8$, 2 — $N_r = 16$, 3 — $N_r = 32$, 4 — точное решение.

точках, менее чувствительна к погрешностям расчета смещений в окрестности кончика, чем формула (2.19).

На рис. 2.26 показаны распределения КИН вдоль фронта плоской круговой трещины, наклоненной на угол $\alpha = 45^\circ$ от направления действия растягивающих напряжений, полученные по аналитическим формулам (2.128)–(2.130) и по двухточечной формуле (2.127), в которой точки 1 и 2 удалены от фронта трещины на расстояние $L_f = 0.04R$.

2.5.4. Влияние выбора типа элементов в дуальном МГЭ на точность расчета КИН

Прежде чем проводить сравнение между формулами расчета КИН, покажем сходимость дуального МГЭ к точному решению. Для этого построим серию сеток, характеризующихся разбиением в окружном направлении на N_c элементов и в радиальном — на N_r элементов. Параметры задачи будем использовать те же, что и ранее.

На рис. 2.27 приведены распределения ширины трещины W вдоль радиальной координаты r для демонстрации сеточной сходимости численного решения задачи к точному.

Видно, что дуальный МГЭ вычисляет ширину трещины W с достаточно высокой точностью. Максимум погрешности достигается на фронте трещины. Порядок аппроксимации со-

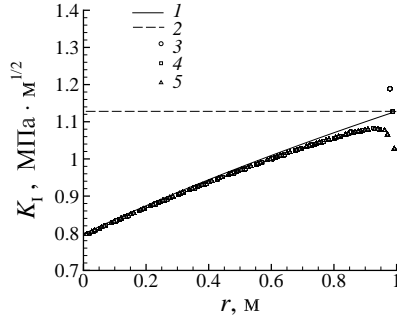


Рис. 2.28. Зависимости K_I от положения точки, используемой для его расчета: точное значение КИН (2.128) (1), формула (2.126) на основе точных смещений (2.131) (2), формула (2.126) на основе смещений, полученных дуальным МГЭ с линейными элементами $N_c = 32$ (3 — $N_r = 8$, 4 — 16, 5 — 32).

ставляет $\sim 1/2$. Погрешность в окрестности кончика трещины при применении дуального МГЭ более заметна, чем при применении МГЭ/МО, так как использование разрывных элементов не позволяет удовлетворить условию на кончике трещины $W_{\text{num}}(R) = W_{\text{ex}}(R) = 0$, которое в МГЭ/МО выполняется автоматически.

Для оценки погрешности расчета КИН, обусловленной неточностью в расчете ширины трещины, проанализируем зависимость значения КИН от положения точки, выбранной для формулы (2.126). На рис. 2.28 и рис. 2.29 приведены зависимости значений первой моды КИН от положения точки r , смещения в которой использовались для расчета КИН по формуле (2.126). Для расчета НДС материала использовались линейные (на рис. 2.28) и квадратичные (на рис. 2.29) элементы.

Видно, что на расстоянии нескольких элементов от фронта K_I вычисляется достаточно точно, а на фронте трещины погрешности велики. Замена линейных элементов на квадратичные не приводит к повышению точности. С инженерной точки зрения, достоинством квадратичных элементов по сравнению с линейными является то, что рассчитанный на их основе КИН может использоваться как верхняя оценка для точного значения, тогда как КИН, рассчитанный на основе линейных элементов, может быть как больше, так и меньше точного значения.

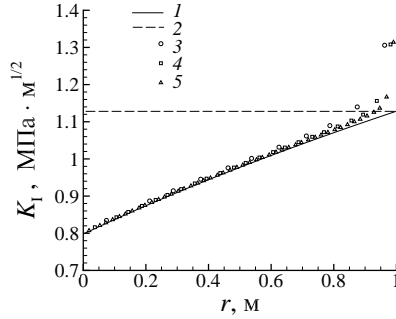


Рис. 2.29. Зависимости K_I от положения точки, используемой для его расчета: точное значение КИН (2.128) (1), формула (2.126) на основе точных смещений (2.131) (2), формула (2.126) на основе смещений, полученных дуальным МГЭ с квадратичными элементами $N_c = 32$ ($N_r = 16$; 3 – $N_r = 4$, 4 – 8, 5 – 16).

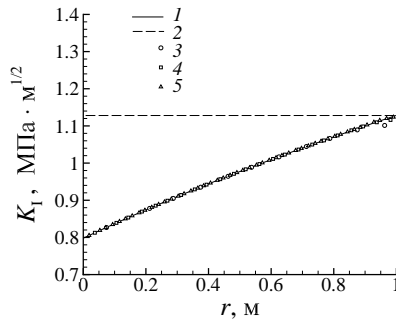


Рис. 2.30. Зависимости K_I от положения точки, используемой для его расчета: точное значение КИН (2.128) (1), формула (2.126) на основе точных смещений (2.131) (2), формула (2.126) на основе смещений, полученных дуальным МГЭ с квадратичными и специальными элементами $N_c = 32$ (3 – $N_r = 8$, 4 – 16, 5 – 32).

Как показано в §2.5.3, одним из эффективных способов повышения точности расчета КИН является использование более сложных интерполяционных формул. Здесь же покажем эффективность и другого способа повышения точности расчета КИН и НДС материала в окрестности фронта трещины – специальных элементов у фронта трещины (см. §2.2.7). Как видно из рис. 2.30, где приведены зависимости K_I от положения точки, используемой для его расчета, значения КИН значительно

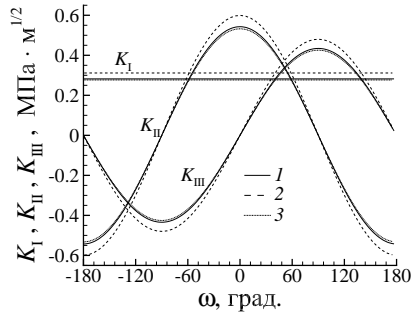


Рис. 2.31. Распределения КИН вдоль фронта наклоненной на 45° трещины, полученные из точного решения (1), дуальным МГЭ без (2) и с использованием специальных элементов (3).

меньше отклоняются от точных и могут быть рассчитаны на достаточно грубой сетке.

В завершение на рис. 2.31 проведем сравнение распределений всех трех КИН вдоль фронта наклонной на $\alpha = 45^\circ$ трещины, рассчитанных с и без специальных элементов у фронта трещины. Внутри трещины в обоих случаях использовались квадратичные элементы и одноточечная формула (2.126). Видно, что использование специальных элементов позволяет снизить погрешность расчета K_I с 11 до 2 %.

Глава 3

Критерии разрушения и построение зародышевых трещин

Разрушение материала представляет собой сложный многоступенчатый процесс, включающий в себя упругую деформацию материала, появление микроскопических дефектов в материале, объединение их в макроскопическую зародышевую трещину и дальнейшее распространение образовавшейся трещины. Понимание природы этих процессов важно как в фундаментальной науке, так и в инженерной практике. Математическое моделирование — один из основных методов изучения процессов разрушения материалов. Ему посвящено много работ, начиная с XIX в. Наиболее полный обзор представлен в [150].

Моделирование зарождения трещин состоит из следующих шагов: 1) расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) тела под действием нагрузок, 2) анализ НДС с помощью критерия разрушения и 3) построение на его основе зародившейся трещины, т. е. определение ее местоположения, формы и ориентации в пространстве. Методы расчета НДС тела описаны в предыдущей главе, здесь же опишем наиболее интересные критерии разрушения, основанные на анализе НДС.

3.1. Критерии разрушения

Особенностью квазихрупкого разрушения является неоднородность структуры материала, наличие в нем микроскопических трещин. Эта неоднородность является причиной так называемого эффекта размера — зависимости нагрузок, необходимых для разрушения тела, от его геометрических масштабов.

Большое количество исследований эффекта зависимости прочностных характеристик материала от размера исследуемого образца проведено на задачах об изгибе бетонных балок. Поскольку форма балок, используемых в практических приложениях и в лабораторных экспериментах, одинакова, то критерии, сформулированные в терминах номинальной нагрузки и размера образца, могут быть перенесены с лабораторных исследований в практические приложения без каких-либо модификаций. Однако, для разработки критерия, применимого для широкого круга задач, необходимо обращаться к экспериментам, описывающим разрушение тел более сложных форм. Обзор работ, посвященных исследованию эффекта размера на основе как экспериментов, так и методов математического моделирования, приведен в [151, 152].

Одним из приложений моделей разрушения, способных учитывать эффект размера, проявляющийся при рассмотрении областей сложной формы, является описание разрушения горной породы у перфорированных скважин при проведении гидроразрыва или при разрушении самой скважины. Размеры скважины и перфорации различаются существенно. Из-за эффекта размера давление, необходимое для разрушения породы у перфорации, может быть существенно выше, чем необходимое для разрушения породы у скважины, даже если напряжения, действующие на поверхности этих элементов, одинаковы. Использование критерия, не способного учитывать эффект размера, может привести к неправильному предсказанию места инициации трещины и ее ориентации. В то же время значения этих параметров зародышевой трещины являются важным вопросом при проведении гидроразрыва, так как «плохо ориентированная» зародышевая трещина влияет на весь процесс распространения и может привести к его остановке [23, 35, 153]. Поэтому учет эффекта размера существенно повышает до-

стоверность предсказаний при моделировании гидроразрыва и оценке устойчивости скважин.

3.1.1. Общий вид критерия разрушения

Для того чтобы показать место критерия разрушения при моделировании зарождения трещины, рассмотрим тело, в котором известно НДС, рассчитанное методами механики сплошной среды. Для описания процесса разрушения необходимо применить к этому НДС условие, которое бы указывало, что в точке тела \mathbf{x} разрушение имеет место, — критерий разрушения. В общем случае критерий разрушения может быть записан в виде следующего неравенства:

$$F_s(\mathbf{x}, u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, d) \geq F_m(\sigma_t^\infty, K_{Ic}, T, \dots), \quad (3.1)$$

где функция F_s определяется НДС тела (значениями смещений u_i , напряжений σ_{ij} , деформаций ε_{ij}) в точке \mathbf{x} или некоторой ее окрестности, а функция F_m зависит только от параметров материала (прочности на разрыв σ_t^∞ , трещиностойкости K_{Ic} , температуры T и т. д.), но не зависит от НДС тела. Размер d может трактоваться как размер микротрещин, присутствующих в материале (K_I -критерий), размер зоны контакта в трещине (модель зоны сцепления) или длина отрезка / размер зоны осреднения параметров НДС (d -критерий).

Например, в одном из первых известных критериев прочности — критерии максимальных растягивающих напряжений (МРН) [154], $F_s(\mathbf{x}) = \sigma_3(\mathbf{x})$, где $\sigma_3(\mathbf{x})$ — максимальное главное напряжение в точке \mathbf{x} , $F_m = \sigma_t^\infty$, где σ_t^∞ — прочность материала на разрыв. То есть в критерии предполагается, что разрушение материала в точке \mathbf{x} наступает, когда максимальное главное напряжение σ_3 в этой точке превышает прочность материала на разрыв

$$\sigma_3(\mathbf{x}) \geq \sigma_t^\infty. \quad (3.2)$$

Использование различных функций F_s и F_m приводит к различным видам критериев. Ниже будут рассмотрены основные виды критериев, используемые при описании разрушения горных пород.

3.1.2. Классические критерии, не учитывающие эффект размера

К группе наиболее популярных при описании разрушения горных пород критериев относятся такие классические критерии, как МРН (3.2), Сен-Венана [155], Треска [156], Мора–Кулона [157, 158], Друкера–Прагера [159] и другие. Общей их особенностью является то, что для проверки условия разрушения в точке анализируется напряженное состояние только в этой точке, но не в ее окрестности.

Следует отметить, что, согласно линейной теории упругости, НДС двух геометрически подобных тел разного размера подобны. То есть характеристики НДС (значения компонент тензора напряжений, тензора деформаций) в соответствующих точках тел равны. Поэтому эффект размера невозможно описать, основываясь только на значениях компонент тензора напряжений или тензора деформаций в некоторой точке, не учитывая каким-либо специальным образом размер разрушаемого тела. Несмотря на указанный недостаток, локальные критерии продолжают использоваться и развиваться [160, 161].

Далее рассмотрим более сложные критерии, способные правильно предсказывать место образования трещины.

3.1.3. K_I -критерий

Один из эффективных подходов, способных учитывать эффект размера, основывается на методах механики трещины, заложенных в работах Гриффитса [162] и Ирвина [137]. Согласно этому подходу предполагается, что в материале присутствуют дефекты — микротрещины некоторого размера. Постулируется, что разрушение материала происходит, когда выполняются условия распространения этих трещин, т. е. коэффициент интенсивности на кончиках трещин K_I превосходит критическое значение для материала, называемое трещиностойкостью K_{Ic} . т. е. функции F_s и F_m в (3.1) равны соответственно K_I и K_{Ic}

$$K_I \geq K_{Ic}. \quad (3.3)$$

За счет введения размерного параметра — длины трещины d , зависящей от внутренней структуры исследуемого материала, такие критерии получают возможность учитывать эффект

размера. Например, в [163–165] решена задача зарождения трещины от цилиндрической полости в блоке горной породы под действием сжатия. В [166] рассмотрена подобная задача зарождения трещины на поверхности круглой полости в материале, нагруженном произвольными внешними напряжениями. В этой работе, в отличие от [163–165], ввиду произвольности нагрузок местоположение зародившейся трещины предполагалось неизвестным. Для его отыскания последовательно в разных точках полости строились маленькие трещины одинаковой длины d . В качестве зародышевой трещины выбиралась та, у которой КИН первой моды был максимален.

Недостаток этой группы критериев заключается в необходимости перебирать все возможные положения трещин. Это делает сложным обобщение их на трехмерный случай. Другой недостаток заключается в необходимости строить сетки для зародышевых трещин, размеры которых существенно (иногда на порядки) уступают размерам полостей или образцов.

3.1.4. Критерии, основанные на модели сцепления

Принципиально новый подход, учитывающий пластическое поведение материала в зоне разрушения, был предложен Дагдейлом [167] и Баренблаттом [168] и получил название модель зоны сцепления. В этой модели, в отличие от моделей хрупкого разрушения с резким образованием зародышевой трещины, процесс зарождения трещины является плавным и происходит в так называемой зоне сцепления, в которой поведение материала описывается нелинейной немонотонной зависимостью между раскрытием трещины и напряжениями. На части этой зоны материал деформируется линейно или почти линейно. После достижения максимального значения напряжения начинают уменьшаться согласно специальному закону, который выбирается исследователем, что отражается на виде функции F_s в формуле (3.1).

Согласно этому критерию при достижении смещениями критического значения материал полностью разрушается и образуется трещина. Недостатком такого подхода является то, что он не учитывает энергию трещинообразования. Этот недо-

статок был устранен в [169], где был предложен энергетический критерий для модели зоны сцепления. В [170] один из вариантов этой модели был применен для моделирования отслаивания материалов по их границе раздела. В [171] линейный вариант этой модели применен для решения двумерной задачи зарождения и распространения трещины в графитовом образце с пропилом.

Как в предыдущей группе критериев, при применении модели зоны сцепления необходимо перебирать трещины различной ориентации. Кроме того, зависимость между раскрытием трещины и напряжениями в зоне сцепления необходимо постулировать исходя из дополнительных соображений.

3.1.5. d -критерий

Еще один подход к формулировке функции F_s рассмотрен в [172, 173]. Предлагается сравнивать с прочностью материала на разрыв ($F_m = \sigma_t^\infty$) растягивающие напряжения, но посчитанные не локально в точке, а осредненные по нормальному к поверхности границы отрезку некоторой длины d (критерий Нейбера–Новожилова):

$$F_s = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_3 dn \leq \sigma_t^\infty = F_m. \quad (3.4)$$

Этот подход и его модификации благодаря наличию размерного параметра d позволяют учесть эффект размера. Но для этого подхода уже не требуется рассматривать трещины различной ориентации в отличие от K_I -критерия или модели зоны сцепления.

Например, в [165, 174] критерий (3.4) применен к задаче зарождения трещины от круглых полостей различных радиусов и получена зависимость давления разрушения от размера полости, согласующаяся в общих чертах с экспериментом. В [175] предложен похожий критерий, использующий вместо напряжений, осредненных по отрезку, энергию деформаций, осредненную по некоторой области поверхности вокруг рассматриваемой точки. С помощью этого критерия решена задача трехточечного изгиба пластин с U-образными пропилами. В [35] после

валидации критерий (3.4) был применен для решения задачи о разрушении скважины с пропилами и показал удовлетворительное согласование с экспериментом [176].

К этой же группе можно отнести критерий, предложенный в [177]. Здесь вместо анализа осредненного по отрезку НДС используются значения, полученные в точке этого отрезка, наиболее удаленной от рассматриваемой.

3.1.6. Критерий Базанта

Прежде чем предложить формулировку критерия, основанного на кривизне поверхности, приведем эмпирическую зависимость Базанта, описывающую эффект размера в экспериментах [178]:

$$\sigma_N(D) = \sigma_t^\infty \left(1 + \frac{D_b n}{l_p + D} \right)^{1/n}. \quad (3.5)$$

Здесь σ_N — прочность образца, т. е. величина приложенной к нему нагрузки в момент разрушения, D — характерный размер образца, σ_t^∞ — прочность материала образца на разрыв, D_b , l_p и n — параметры, зависящие от формы образца, условий эксперимента, способа приложения нагрузки. В [178] эффект размера понимается как зависимость прочности образца (σ_N) от его размера D при сохранении остальных условий эксперимента неизменными. В [178] прочность $\sigma_N(D)$ есть параметр нагружения, определяемый как отношение приложенной к образцу силы к площади поперечного сечения.

Благодаря своей универсальности зависимость (3.5) может быть положена в основу критерия разрушения. Хотя такой критерий не будет давать объяснения физических процессов, происходящих при разрушении, он, благодаря способу построения, будет описывать эффект размера.

3.1.7. R -критерий

Для того чтобы зависимость (3.5) можно было использовать при моделировании разрушения образцов сложной формы, в которых место разрушения заранее неизвестно, необходимо переформулировать ее так, чтобы параметры нагрузки и размера

понимались однозначно, не зависели от формы образца, могли быть определены в каждой точке поверхности.

Чтобы сформулировать (3.5) в общем виде критериев (3.1), модифицируем критерий (3.2), заменив прочность на разрыв σ_t^∞ функцией $\sigma_t(R(\mathbf{x}))$, зависящей от радиуса кривизны поверхности $R(\mathbf{x})$ в рассматриваемой точке \mathbf{x} . Полученный в результате критерий записывается как

$$\sigma_3(\mathbf{x}) \geq \sigma_t(R(\mathbf{x})), \quad (3.6)$$

$$\sigma_t(R(\mathbf{x})) = \sigma_t^\infty \left(1 + \frac{D_b n}{l_p + R(\mathbf{x})} \right)^{1/n}, \quad (3.7)$$

где параметры D_b , l_p , n должны определяться экспериментально для конкретного материала, как в (3.5). Заметим, что эти коэффициенты в формулировке (3.7) в отличие от (3.5) предполагаются зависящими только от характеристик материала, но не от конфигурации всего тела и постановки задачи. Преимущество критерия (3.6), (3.7) перед критерием (3.5) заключается в отсутствии необходимости учитывать форму или структуру образца. Этот критерий трансформируется в критерий (МРН) при $R(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ для всех $\mathbf{x} \in S$, где S — поверхность образца или полости. Одной из особенностей критерия является необходимость учитывать наличие криволинейных и плоских участков поверхности. Если присутствуют и те, и другие, то критерий (3.6), (3.7) должен проверяться только для тех участков поверхности, на которых $R(\mathbf{x})$ конечно.

3.2. Построение зоны разрушения и зародышевой трещины

Для построения зародышевой трещины предлагается процедура, применимая вместе с любым из описанных критериев разрушения, описанным в § 3.1. Она состоит из определения зоны разрушения и построения непосредственно зародышевой трещины.

Построение зоны разрушения

Предположим, что напряжения, приложенные к телу, характеризуются некоторым параметром, например, величиной σ_N , определенной в § 3.1.6. Пусть для выполнения критерия (3.6), (3.7) в точке $\mathbf{x} \in S$ требуется нагрузка $\sigma_N(\mathbf{x})$. Определим минимальное значение нагрузки для всей поверхности S как величину нагрузки, при которой критерий выполняется хотя бы в одной точке поверхности S :

$$\sigma_N^{\min} = \min_{\mathbf{x} \in S} \sigma_N(\mathbf{x}). \quad (3.8)$$

Множество точек $\mathbf{x} \in S$, в которых выполняется условие

$$\sigma_N^{\min} \leq \sigma_N(\mathbf{x}) \leq (1 + \varepsilon)\sigma_N^{\min}, \quad (3.9)$$

назовем зоной инициации трещины S . На рисунках будем обозначать зоны инициации темным цветом. Параметр ε позволяет задавать размер зоны инициации. НДС, которое используется для нахождения области разрушения, может быть рассчитано любым из описанных методов. Например, в [34, 35] для этой цели использовался разработанный авторами вариант МГЭ. Для иллюстрации результатов применения этого метода на рис. 3.1 показаны зоны инициации трещины на поверхности

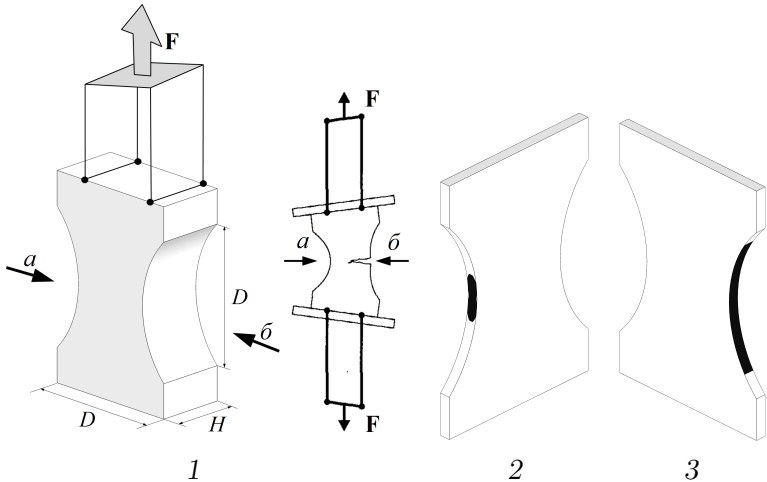


Рис. 3.1. Схема эксперимента по разрушению образцов с круговыми вырезами [179] при одноосном растяжении (1) и зоны инициации трещины на их поверхностях при $\varepsilon = 0.875$: 2 — вид а; 3 — вид б.

образцов с круговыми вырезами, использованных в экспериментах [179] для $D = 1.6$ м, $\varepsilon = 0.875$. Детали эксперимента и численных расчетов описаны в § 3.3.2.

Построение зародышевой трещины

Для построения основания зародышевой трещины определяют геометрический центр зоны инициации \mathbf{x}_f^c и средняя линия зоны инициации ζ_0 (рис. 3.2). Средняя линия строится таким образом, что содержит центр \mathbf{x}_f^c и в каждой точке \mathbf{x}_f ортогональна вектору \mathbf{n}_f – собственному вектору тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_f)$, соответствующему максимальному собственному значению. Средняя линия считается пересечением трещины и поверхности тела или полости и продолжается до границ зоны инициации в обе стороны от центра \mathbf{x}_f^c .

Далее производится построение самой зародышевой трещины. Предполагается, что трещина перпендикулярна поверхности тела, поэтому в каждой точке средней линии строится перпендикуляр \mathbf{n}_c длины $L(\mathbf{x}_f)$. Длина $L(\mathbf{x}_f)$, т. е. глубина зародышевой трещины в каждой точке \mathbf{x}_f , предполагается пропорциональной разнице между функцией $F_s(\mathbf{x}_f)$ и критическим значением F_m (см. (3.1)):

$$L(\mathbf{x}) = L_0(F_s(\mathbf{x}_f) - F_m). \quad (3.10)$$

Максимальная глубина трещины L_0 является параметром модели.

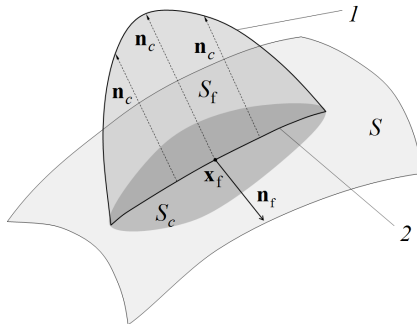


Рис. 3.2. Схема построения зародышевой трещины S_f от поверхности S . 1 – фронт зародышевой трещины, 2 – средняя линия.

Заметим, что для R -критерия глубина трещины в точке пропорциональна превышению растягивающих напряжений над критическим значением $\sigma_t(R_x)$ в точке x . Для d -критерия глубина трещины пропорциональна превышению осредненных растягивающих напряжений над прочностью материала на разрыв σ_t^∞ .

3.3. Валидация критериев разрушения

3.3.1. Разрушение блоков с цилиндрическими отверстиями

В экспериментах [165] производилось одноосное сжатие прямоугольных блоков из известняка (Tundall limestone) с круговым отверстием радиуса R_w в центре. Материал характеризуется модулем Юнга $E = 21$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.31$ и прочностью на разрыв $\sigma_t^\infty = 1.5$ МПа. Размер блоков в экспериментах был выбран достаточно большим, для того чтобы влияние границ на НДС материала в окрестности отверстия было незначительным. Правая и левая грани блока нагружались давлением p , остальные грани были свободны от напряжений (рис. 3.3). Давление увеличивалось до момента инициации трещины, нормальной к поверхности отверстия. Номинальной нагрузкой σ_N считалась величина давления, при котором инициировалась трещина. Радиус отверстия R_w в экспериментах варьировался от 0.003 м до 0.031 м. Для каждого из радиу-

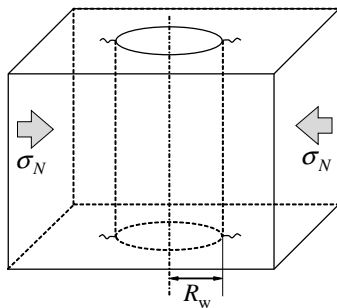


Рис. 3.3. Схема экспериментов по разрушению блоков с цилиндрическими отверстиями [165].

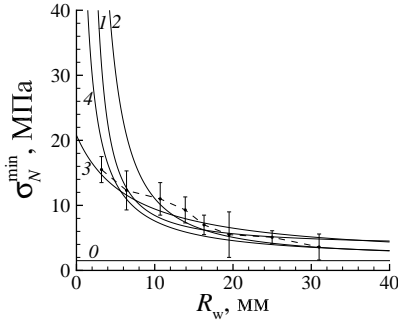


Рис. 3.4. Зависимость давления инициации p_{init} от размера отверстия R_w . Точки с вертикальными отрезками — эксперимент, 0 — критерий МРН ($\sigma_t = 1.5$ МПа); 1 — K_{Ic} -критерий ($K_{Ic} = 0.38$ МПа $\sqrt{\text{м}}$, $d = 3$ мм); 2 — d -критерий ($\sigma_t = 1.5$ МПа, $d = 13$ мм); 3 — R -критерий ($\sigma_t^\infty = 1.5$ МПа, $D_b = 90$ мм, $l_p = 7$ мм, $n = 1$); 4 — R -критерий с параметрами $\sigma_t^\infty = 1.5$ МПа, $D_b = 41.4$ мм, $l_p = 0.17$ мм, $n = 1$ (см. § 3.3.3).

сов было проведено несколько экспериментов, что позволило получить не только зависимость давления инициации трещины от радиуса отверстия, демонстрирующую эффект размера $\sigma_N = \sigma_N(R_w)$, но и оценку величины погрешности эксперимента (рис. 3.4).

В работе [165] был применен критерий Ирвина (3.3) для описания зависимости номинальной нагрузки от характерного размера образца, за который принимался радиус цилиндрического отверстия. Предполагалось, что на поверхности отверстия существуют маленькие зародышевые трещины некоторого размера l_{frac} , направленные по нормали к поверхности отверстия. НДС находилось с помощью аналитических формул, приведенных в [180, 181]. Длина трещины l_{frac} , так же как и трещиностойкость материала K_{Ic} , подбиралась, чтобы приблизить рассчитанную номинальную нагрузку к полученной в эксперименте. Наилучшее совпадение было достигнуто при $K_{Ic} = 0.38$ МПа $\sqrt{\text{м}}$, $l_{\text{frac}} = 3$ мм. Авторы [165] отмечают, что наилучшее совпадение достигалось для значения трещиностойкости, отличавшегося от значения, полученного для этого материала другими исследователями.

Попытка описать эффект размера, наблюдаемый в этой серии экспериментов, с помощью критерия Нейбера–Новожилова

была сделана в работах [165] и [35]. Целью [35] была разработка методики описания разрушения, поэтому НДС, как и в настоящей монографии, рассчитывалось МГЭ на основе трехмерных уравнений упругого равновесия. В обеих работах при сопоставлении рассчитанной номинальной нагрузки с полученной в эксперименте варьировался один параметр – длина отрезка осреднения d . Наилучшая аппроксимация экспериментальных данных была достигнута при значении $d = 13$ мм (рис. 3.4).

При использовании R -критерия параметр n был зафиксирован равным 1. Прочность материала на разрыв $\sigma_t^\infty = 1.5$ МПа была известна из работы [165]. Варьировалось только два параметра D_b и l_p . Наилучшее совпадение рассчитанной номинальной нагрузки с полученной в эксперименте было достигнуто при значениях $D_b = 90$ мм, $l_p = 7$ мм, $n = 1$ (см. рис. 3.4). На этот рисунок также была добавлена кривая 4, полученная по R -критерию с параметрами $D_b = 41.4$ мм, $l_p = 0.17$ мм, $n = 1$, которые подобраны для эксперимента о разрушении скважины с пропилами (см. § 3.3.3).

При использовании критериев (3.4) и (3.3) не удается аппроксимировать зависимость критического давления от радиуса отверстия во всем диапазоне его изменения. Эти критерии существенно завышают прочность образцов малых размеров $3 \text{ мм} < R_w < 10 \text{ мм}$. R -критерий лишен этого недостатка и позволяет рассчитать давление разрушения для всего диапазона изменения радиуса отверстия.

3.3.2. Разрушение блоков с боковыми вырезами

В [179] описаны эксперименты по разрушению цементных пластин с выемками под действием растяжения. Материал характеризуется модулем Юнга $E = 20$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.2$ и прочностью на разрыв $\sigma_t^\infty = 2.75$ МПа. Схема эксперимента и геометрические параметры разрушаемых образцов изображены на рис. 3.1. К верхней и нижней граням образца были приложены растягивающие силы \mathbf{F} . Рассмотренные в эксперименте образцы имели одинаковую толщину $H = 0.1$ м, а их характерный размер D варьировался от 0.05 до 1.6 м, что позволяло получить зависимость номинальной нагрузки (рис. 3.5), демонстрирующую эффект размера.

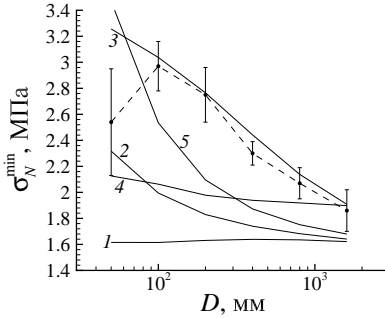


Рис. 3.5. Зависимость прочности образца от его размера при $\sigma_t^\infty = 2.75$ МПа. Точки с вертикальными отрезками — эксперимент; 1 — критерий МРН; 2 — d -критерий ($d = 15$ мм); 3 — R -критерий ($D_b = 320$ мм, $l_p = 260$ мм, $n = 1$); 4 — R -критерий с учетом всех поверхностей ($D_b = 320$ мм, $l_p = 260$ мм, $n = 1$); 5 — R -критерий с параметрами $D_b = 41.4$ мм, $l_p = 0.17$ мм, $n = 1$ (см. § 3.3.3).

В численных экспериментах НДС рассчитывалось методом граничных элементов. Так же, как и в эксперименте, на верхней и нижней гранях задавались растягивающие напряжения $\mathbf{t} = p \cdot \mathbf{n}$, на боковых — нулевые $\mathbf{t} = 0$ (см. рис. 3.1). Использовалась сетка с 1472 элементами на поверхности образца. Так как задача упругого равновесия пластины с выемкой не имеет аналитического решения, погрешность аппроксимации была оценена методом Рунге с помощью серии расчетов на последовательности сеток. Она не превосходила 2%. Так же как в эксперименте, напряжение p увеличивалось до достижения критического значения, при котором выполнялся рассматриваемый критерий разрушения.

На рис. 3.5 представлены зависимости номинального напряжения σ_N от размера образца D , полученные численно и экспериментально [179]. При использовании d -критерия наилучшая аппроксимация экспериментальных данных достигалась при длине отрезка осреднения $d = 15$ мм и прочности материала на разрыв $\sigma_t^\infty = 2.75$ МПа. R -критерий дает наилучшее совпадение с экспериментом при параметрах $D_b = 240$ мм, $l_p = 200$ мм, $n = 1$, $\sigma_t^\infty = 2.75$ МПа (см. рис. 3.5). Как и в задаче о разрушении блоков с отверстиями (§ 3.3.1), d -критерий не позволяет описать зависимость номинальной нагрузки от размера образца с той же точностью, что и предлагаемый R -критерий.

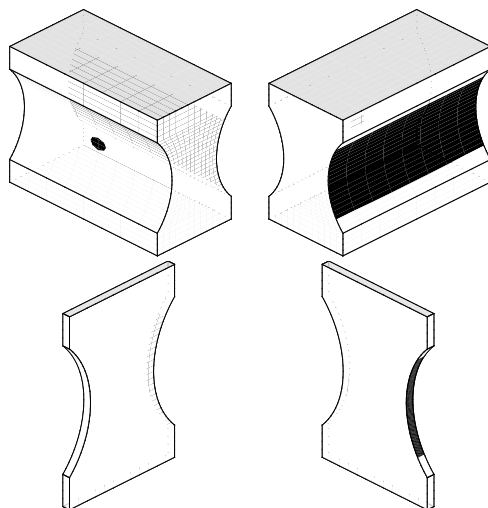


Рис. 3.6. Зоны инициации трещины для образцов с круговыми вырезами при $\varepsilon = 0.822$: $D = 0.05$ м (верх); $D = 1.6$ м (низ).

Рассчитанные по R -критерию при $\varepsilon = 0.822$ зоны инициации трещины на короткой (a) и длинной (b) сторонах показаны на рис. 3.6 для $D = 0.05$ м (вверху) и $D = 1.6$ м (внизу). Для размера образца $D = 1.6$ м и $\varepsilon = 0.875$ зоны инициации показаны на рис. 3.1.

Как показано на рис. 3.1, нагрузка в эксперименте была приложена несимметрично. Поэтому трещина в эксперименте всегда инициировалась на короткой стороне (b). Численный эксперимент позволяет построить зоны инициации на обеих коротких сторонах образца. Согласно рис. 3.5, минимальная нагрузка, вызывающая в эксперименте с $D = 1.6$ м образование трещины на короткой стороне (b), равна $\sigma_N^{\min} = 1.9$ МПа.

На рис. 3.1 можно видеть, что нагрузка $(1 + \varepsilon)\sigma_N^{\min} = 3.58$ МПа с $\varepsilon = 0.875$ приводит к инициации трещины на стороне (a). Тогда как нагрузки $(1 + \varepsilon)\sigma_N^{\min} = 3.48$ МПа с $\varepsilon = 0.822$ для этого недостаточно, как следует из рис. 3.6. Таким образом, минимальная нагрузка, необходимая для инициации трещины на стороне (a), в 1.875 больше, чем нагрузка, вызывающая разрушение на стороне (b).

Как было сказано выше, R -критерий применяется для определения зон инициации трещин на участках поверхностей S в

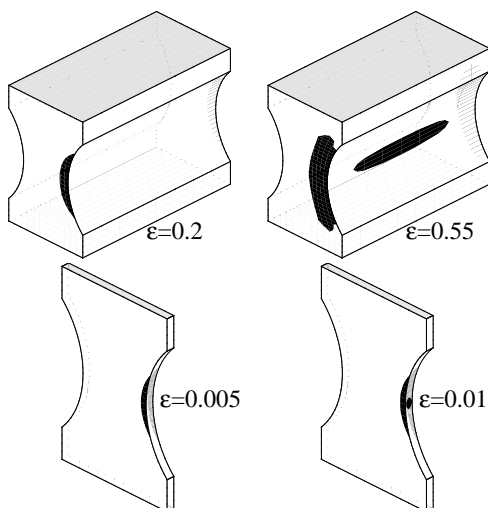


Рис. 3.7. Зоны инициации трещины для образцов с круговыми вырезами при применении R -критерия для всей поверхности S : $D = 0.05$ м (верх); $D = 1.6$ м (низ).

трехмерном пространстве, радиус кривизны которых конечен. В этом случае для каждой точки учитывается только минимальный радиус кривизны поверхности в ней. Для исследования особенностей R -критерия задача о разрушении образцов с круговым вырезом была решена в постановке, в которой участки поверхности с бесконечным радиусом кривизны также учитывались.

На рис. 3.7 представлены зоны инициации трещин, полученные в такой постановке. Трещина инициировалась только на одной стороне образца, противоположной стороне изгиба (вид (б) на рис. 3.1). Прочность образца, рассчитанная в такой постановке, демонстрирует значительно менее выраженный эффект размера (см. рис. 3.5). Вероятно, в случае большого радиуса кривизны необходимо учитывать неоднородность материала и трактовать в качестве радиуса линейные размеры таких неоднородностей, которые позволяют ограничить радиус кривизны сверху. Идея об одновременном влиянии на эффект размера размеров образца и размеров неоднородностей высказывается, например, в экспериментальной работе [182], но применительно к описанному R -критерию требует дополнительного исследования.

Следует отметить, что ни один из описанных критериев не смог адекватно предсказать уменьшение критической нагрузки для самых маленьких образцов, наблюдаемое в эксперименте. В соответствии с концепцией эффекта размера [178], прочность образцов должна расти с уменьшением их размера, тогда как в эксперименте наблюдается ее уменьшение. Как признают сами авторы [179], возможно, эксперименты для такого размера были проведены некорректно, поскольку размер зерен материала был сопоставим с размером самых маленьких образцов. На основе этого рассуждения образцы наименьшего размера не учитывались при калибровке описанных критериев.

3.3.3. Зарождение трещины при разрушении скважины с пропилами

Описание эксперимента и интерпретация результатов

В [176] проведены эксперименты по зарождению и распространению трещин в блоках породы от цилиндрических полостей с пропилами. Схема эксперимента показана на рис. 3.8. Блок с высверленной скважиной и двумя горизонтальными пропилами нагружен сжимающими напряжениями σ_v , σ_H , σ_h , приложенными к граням блока. Предполагается, что $0 < \sigma_h < \sigma_H < \sigma_v$, причем скважина просверлена в направлении минимальных напряжений σ_h . Внутри скважины и пропилов находится жидкость, давление которой увеличивается до момента инициации трещины на пропиле или скважине. В отличие от рассматриваемых в параграфах 3.3.1 и 3.3.2 задач в этом эксперименте наблюдалось два сценария разрушения. В первом на скважине инициировалась продольная трещина, плоскость которой была ортогональна среднему напряжению σ_H . Во втором сценарии на пропилах инициировалась поперечная трещина, ортогональная направлению действия минимального напряжения σ_h .

Рассмотрено два из описанных в работе [176] экспериментов, обозначенных Test2 и Test3. В обоих экспериментах блоки состояли из известняка (Indiana Limestone) с прочностью на разрыв $\sigma_t^\infty = 5.2$ МПа, модулем Юнга $E = 20$ ГПа и коэффициентом Пуассона, равным $\nu = 0.2$. К граням блоков были приложены сжимающие напряжения $\sigma_h = 15.5$ МПа, $\sigma_H = 20.7$ МПа,

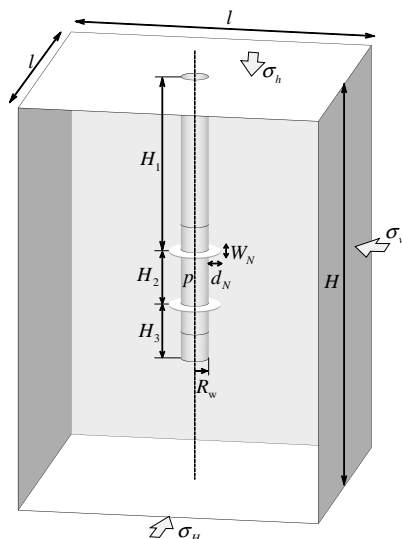


Рис. 3.8. Схема задачи о зарождении трещины от цилиндрической полости с пропилами.

$\sigma_v = 24.1$ МПа. Радиус скважины был равен $R_w = 12.7$ мм. Различие заключалось в форме пропилов: в первом эксперименте было сделано два круговых пропила радиуса $d_N^1 = 9.5$ мм и толщиной $w_N = 3.2$ мм, во втором было пропилено два полукруговых пропила с $d_N^2 = 25.4$ мм и $w_N = 4.8$ мм.

Инициация трещины и разрушение породы в задачах гидроразрыва являются предметом многих дискуссий в последнее время [183, 184]. В соответствии с ними можно выделить следующие этапы процесса трещинообразования, отмеченные также на рис. 3.9. *Инициация трещины (а)* определяется как начальная трещина в породе. Это, вообще говоря, означает разрыв породы без затекания жидкости, иногда называемый «сухой разрыв» в зародышевой трещине. *Затекание жидкости (б)* происходит, когда закачиваемая жидкость из скважины затекает в зародышевую трещину. Скорость затекания меньше, чем скорость закачки в скважину. *Разрушение породы (в)* определяется как максимальное записанное давление. Оно обычно больше, чем давление инициации, и определяется проникновением вязкой жидкости в зародышевую трещину и эффектом сжимаемости системы – высвобождением накопленной энергии в процессе увеличения давления. *Падение давления (г)* происходит

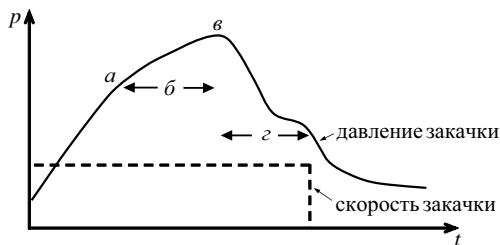


Рис. 3.9. Этапы трещинообразования в процессе гидроразрыва.
Поясн. см. в тексте.

по мере того, как трещина растет и скорость проникновения жидкости в трещину превышает скорость закачки в скважину, давление в скважине падает.

Подобные приведенной зависимости на рис. 3.9 распределения давления от времени наблюдаются в экспериментах [176]. И мы сравниваем с ними результаты моделирования процессов инициации.

Скважина с пропилами малой глубины

Для моделирования разрушения блоков в Test2 использовалась сетка, показанная на рис. 3.10 (слева). В эксперименте Test2 при давлении¹ $p_{\text{init}}^{\text{exp}} = 7660 \text{ psi} = 52.8 \text{ МПа}$ образовывалась продольная трещина. Момент появления трещины фиксировался путем записи акустических событий в блоке (рис. 3.11). В момент фиксации акустического события закачка жидкости в эксперименте останавливалась. Более того, применялась откачка жидкости для обеспечения быстрого падения давления для предотвращения или снижения вероятности распространения трещины после закрытия. Окончательно момент инициации трещины определялся по изменению скорости закачки жидкости, изменению объемов жидкости в гидравлических прессах, обеспечивающих сжатие блока (что свидетельствовало о смещении сторон блока), и серии акустических событий в точках, находящихся на поверхности скважины.

¹psi — *pound per square inch* (фунт на квадратный дюйм, единица измерения, принятая в ряде стран и использованная при проведении описываемых экспериментов). 1 psi = 6894.76 Па.

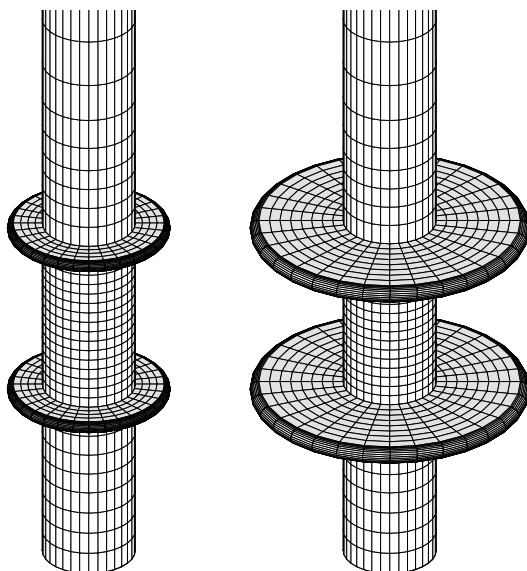


Рис. 3.10. Сетки МГЭ, использованные для расчета НДС при моделировании экспериментов по разрушению блоков Test2 (слева) и Test3 (справа) [176].

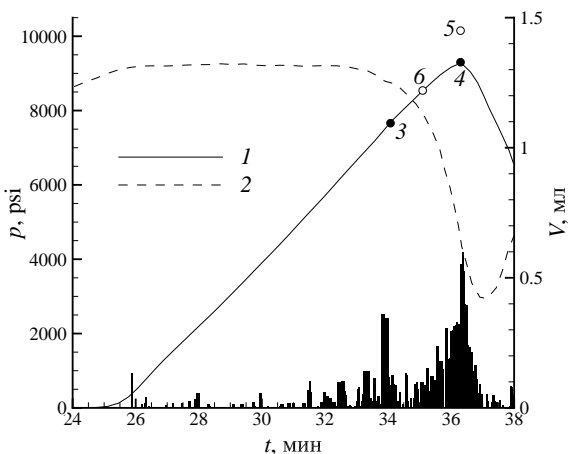


Рис. 3.11. Инициация трещины и разрушение породы при гидроразрыве блока в эксперименте Test2: 1 – давление в скважине (эксперимент); 2 – объем жидкости в гидравлических прессах, направление σ_H ; гистограмма – акустические события; 3 – $p_{init}^{exp} = 7660 \text{ psi} = 52.8 \text{ МПа}$; 4 – $p_{break}^{exp} = 9300 \text{ psi} = 64.1 \text{ МПа}$; 5 – $p_{init}^d = 9850 \text{ psi} = 68 \text{ МПа}$; 6 – $p_{init}^R = 8540 \text{ psi} = 58.9 \text{ МПа}$.

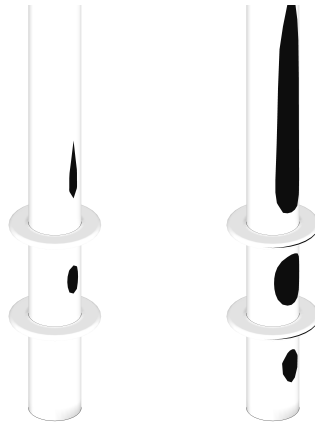


Рис. 3.12. Зоны инициации трещины в эксперименте Test2:
 $\varepsilon = 0.02$ (слева); $\varepsilon = 0.1$ (справа).

При увеличении давления в скважине и пропилах наиболее быстро растут напряжения на внешней стороне пропилов, поэтому классический критерий МРН предсказывает появление поперечной трещины. В работах [35, 176] также отмечается, что этот критерий не способен правильно предсказать давление инициации трещины.

Применение R -критерия позволило правильно предсказать ориентацию и положение зоны инициации трещины, соответствующие продольной трещине, наблюдаемой в эксперименте (рис. 3.12), и получить минимальное давление инициации $p_{\text{init}}^R = 8540 \text{ psi}$ (см. рис. 3.11). Расчетные значения давления $p_{\text{init}}^d = 9850 \text{ psi}$ и $p_{\text{init}}^R = 8540 \text{ psi}$ получены по d - и R -критериям соответственно. Параметры R -критерия были выбраны равными $D_b = 41.4 \text{ мм}$, $l_p = 0.17 \text{ мм}$, $n = 1$. Зоны инициации, рассчитанные по формуле (3.9) для двух случаев $\varepsilon = 0.02$ и $\varepsilon = 0.1$, представлены на рис. 3.12.

Скважина с пропилами большой глубины

Гидроразрыв блока в эксперименте Test3 численно моделировался на сетке, представленной на рис. 3.10 справа. В эксперименте Test3 образовывалась поперечная трещина при минимальном давлении инициации $p_{\text{init}}^{\text{exp}} = 7180 \text{ psi} = 49.5 \text{ МПа}$ (рис. 3.13). Так же как и в эксперименте, расчеты с использованием d - и R -критериев правильно предсказали образование

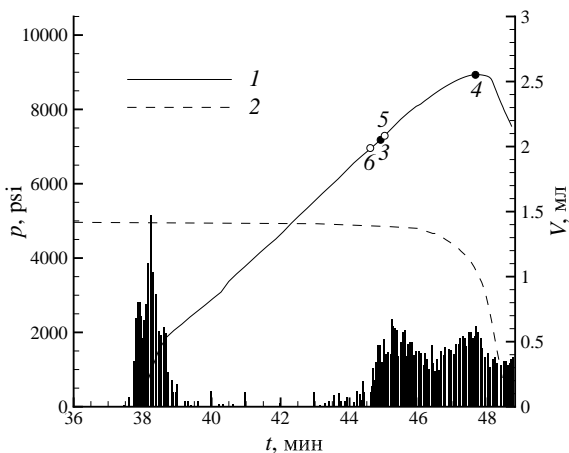


Рис. 3.13. Инициация трещины и разрушение породы при гидроразрыве блока в эксперименте Test3: 1 — давление в скважине (эксперимент); 2 — объем жидкости в гидравлических прессах, направление σ_H ; гистограмма — акустические события; 3 — $p_{\text{init}}^{\text{exp}} = 7180 \text{ psi} = 49.5 \text{ МПа}$; 4 — $p_{\text{break}}^{\text{exp}} = 8943 \text{ psi} = 61.7 \text{ МПа}$; 5 — $p_{\text{init}}^d = 7250 \text{ psi} = 50 \text{ МПа}$; 6 — $p_{\text{init}}^R = 6960 \text{ psi} = 48 \text{ МПа}$.

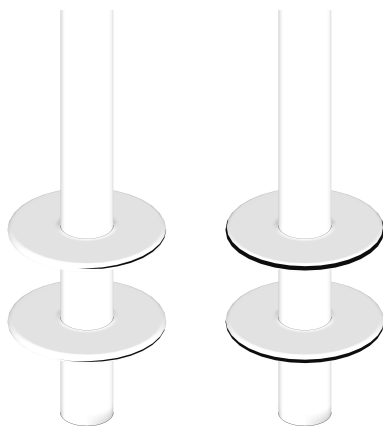


Рис. 3.14. Зоны инициации трещины в эксперименте Test3: $\varepsilon = 0.02$ (слева); $\varepsilon = 0.1$ (справа);

поперечной трещины, расположенной на внешней поверхности пропила [176]. Расчетные минимальные давления инициации $p_{\text{init}}^d = 7250 \text{ psi}$ и $p_{\text{init}}^R = 6960 \text{ psi}$ получены по d - и R -критериям соответственно. Параметры R -критерия были такими же, как и в эксперименте Test2. Зоны инициации, рассчитанные по

(3.9) для двух случаев $\varepsilon = 0.02$ и $\varepsilon = 0.1$, представлены на рис. 3.14. Следует отметить, что дальнейшее увеличение давления в скважине в численных экспериментах приводило к образованию дополнительных трещин: поперечных в эксперименте Test2 и продольных в эксперименте Test3. Этот эффект не наблюдался в натуральных экспериментах из-за разрушения образца.

3.3.4. Зарождение трещины при разрушении перфорированной скважины

Приведем еще одно исследование предложенной методики моделирования инициации трещин, прежде чем перейти к исследованию инициации при разрушении реальных скважин.

Было проведено моделирование процесса инициации трещин гидроразрыва для двух экспериментов, описанных в [44]. В этой работе были проведены три серии по несколько экспериментов. Для численного моделирования были выбраны два эксперимента из второй серии (в статье [44] они называются тесты 5 и 6). Здесь для удобства назовем тест 5 из [44] «эксперимент 1», а тест 6 «эксперимент 2».

Блок породы в обоих экспериментах имел размеры $68.58 \times 68.58 \times 81.28$ см. Внешний диаметр стальной трубы в эксперименте был равен 11.43 см. Соответственно диаметр основной полости полагался равным 11.43 см, так как затрубное пространство в эксперименте было достаточно тонким. Перфорации производились стойкой перфораторов из четырех перфораторов, по четыре перфоратора на 30.48 см, т. е. высота между осями перфораций составляет 7.62 см. Каждый из этих перфораторов имеет калибр 4.29 см. Согласно спецификации, перфораторы дают отверстие диаметром 2 см. По форме любая из перфораций полагались цилиндром, затупленным на сферу.

Параметры породы брались следующие: модуль Юнга $E = 20.7$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.27$, прочность на разрыв $\sigma_c = 4$ МПа.

Блок подвергался сжатию в горизонтальной плоскости двумя ортогонально-направленными гидравлическими домкратами с плоскими поверхностями действия. А по вертикали поджимался струбциной также с плоскими поверхностями дей-

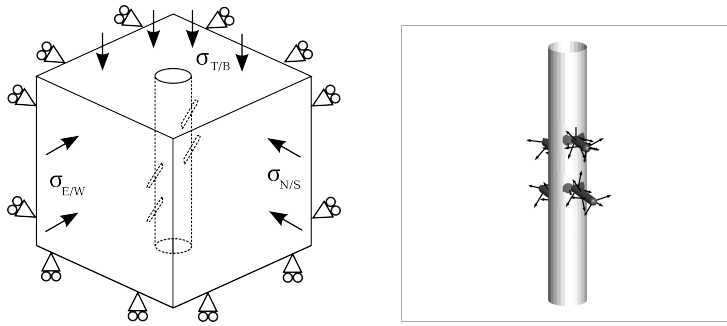


Рис. 3.15. Граничные условия, серым на перфорированной скважинной полости отмечена смоченная зона.

ствия, однако в них были проделаны по центру отверстия для установки скважинной трубы. Очевидно, что между всеми поверхностями действия сохранялся зазор. Поэтому эффективность передачи напряжений сжатия по отношению к общему объему блока была меньше единицы и по результатам измерений [185] равнялась 91 %. Поэтому все напряжения приведены с учетом этого коэффициента.

Так как цементирование было слабым, то часть затрубного пространства заполняла жидкость (смоченная зона). Стороны параллелепипеда были направлены вдоль осей x_1 , x_2 , x_3 (север, запад, вверх соответственно). Грани параллелепипеда в направлениях юг, восток и вниз считались свободно лежащими. Противоположные грани соответственно нагружались ортогональными напряжениями $\sigma_{N/S}$, $\sigma_{E/W}$, $\sigma_{T/B}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{N/S} &= 28.268 \text{ МПа}, \\ \sigma_{E/W} &= 21.952 \text{ МПа}, \\ \sigma_{T/B} &= 43.914 \text{ МПа}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Граничные условия изображены на рис. 3.15.

Поверхность перфорации нагружалась постоянным давлением из каждого эксперимента p_{init} . Приперфорационная смоченная зона также нагружалась давлением p_{init} . Остальная полость скважины за исключением этой небольшой приперфорационной зоны полагалась свободной от напряжений, так как зазор между трубой и породой был заполнен эпоксидным клеем.

Разрушение перфорации

В эксперименте 1 давление разрыва было равно $p_{\text{init}} = 44.8$ МПа. Эскиз геометрических параметров скважинной полости приведен слева на рис. 3.16, нагруженная приперфорационная зона (смоченная зона) изображена справа на рис. 3.16.

Для этого эксперимента была построена сетка, состоящая из линейных треугольных и билинейных четырехугольных элементов. Сетка состоит из 5068 элементов и содержит 5004 узла (15012 степеней свободы).

Зоны разрушения, полученные в результате моделирования, изображены на рис. 3.17. В силу достаточно хорошей симметрии задачи на всех рисунках изображены две перфорации, которые обращены на северо-запад. Отметим, что при понижении давления жидкости на 1.2 МПа зон разрушения не образуется. Следовательно, предложенная методика достаточно точно определяет давление инициации p_{init} .

Проводилось сравнение местоположения зон разрушения с картиной образования трещин. Согласно описанию, в эксперименте 1 развивалось две трещины. Одна из них развивалась вдоль перфораций, обращенных на северо-запад, а затем на

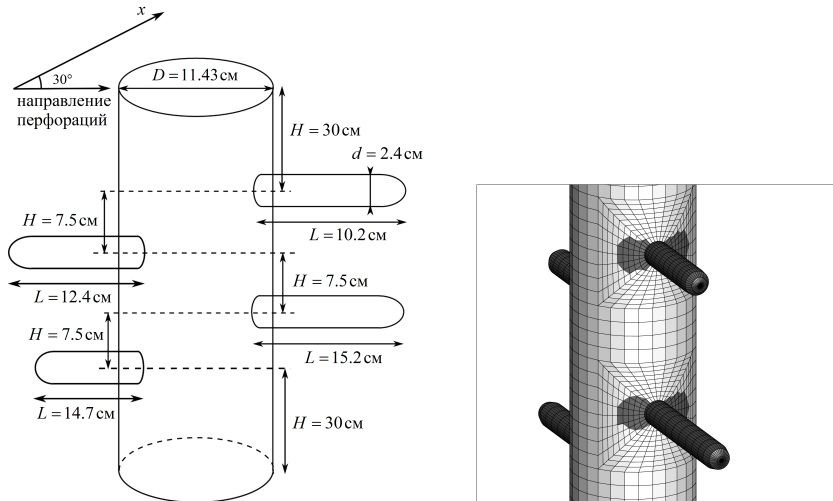


Рис. 3.16. Эскиз скважинной полости и смоченная зона в эксперименте 1.

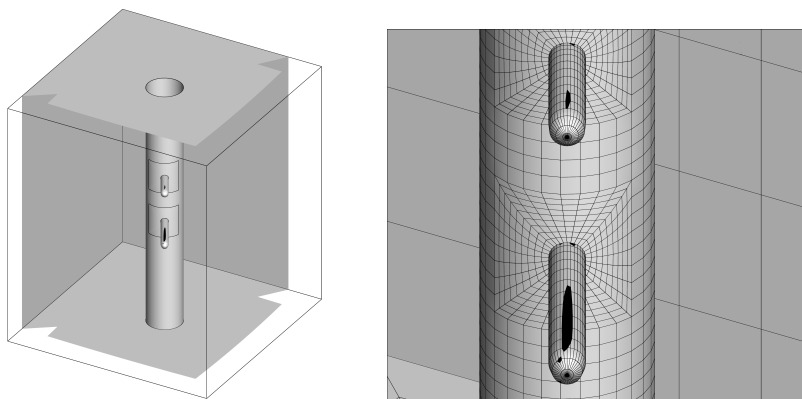


Рис. 3.17. Рассчитанные зоны разрушения при $p_{init} = 44.8$ МПа.

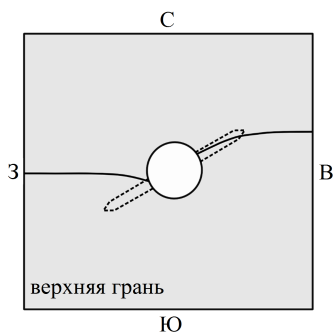


Рис. 3.18. Эскиз распространения трещин в эксперименте 1.

длине примерно в один диаметр скважины плавно повернула строго на запад. Вторая трещина начала развиваться около основания перфораций, обращенных на юго-восток, и затрубного пространства в направлении на восток. Эскиз распространения трещин в эксперименте 1 представлен на рис. 3.18.

Несмотря на разные длины перфораций, сохраняется высокий уровень симметрии, а следовательно, оба этих сценария инициации и развития трещины надо признать равноправными, т. е. следует ожидать при критическом (или при несколько большем) давлении зоны разрушения, соответствующие этим трещинам.

Таким образом, результаты проведенного численного эксперимента хорошо совпадают с результатами натурного.

Разрушение ствола скважины

В эксперименте 2 давление разрыва было равно $p_{\text{init}} = 48.2$ МПа. Эскиз геометрических параметров скважинной полости приведен слева на рис. 3.19, нагруженная приперфорационная зона (смоченная зона) изображена справа на рис. 3.19.

Для этого эксперимента была построена сетка, состоящая из линейных треугольных и билинейных четырехугольных элементов. Сетка состоит из 5068 элементов и содержит 5004 узла (15012 степеней свободы).

Зоны разрушения, получившиеся в результате моделирования, изображены на рис. 3.20. Отметим, что при понижении давления жидкости на 1.6 МПа зон разрушения не образуется. Следовательно, предложенная методика достаточно точно определяет давление инициации p_{init} .

По предложенной ранее методике были построены зародышевые трещины, как показано слева на рис. 3.21. Согласно описанию, в эксперименте 2 развивалось две трещины. Обе развились от затрубного пространства, игнорируя перфорации, — одна из них в направлении на восток, вторая — на запад. Эскиз распространения трещин в эксперименте 2 представлен справа на рис. 3.21.

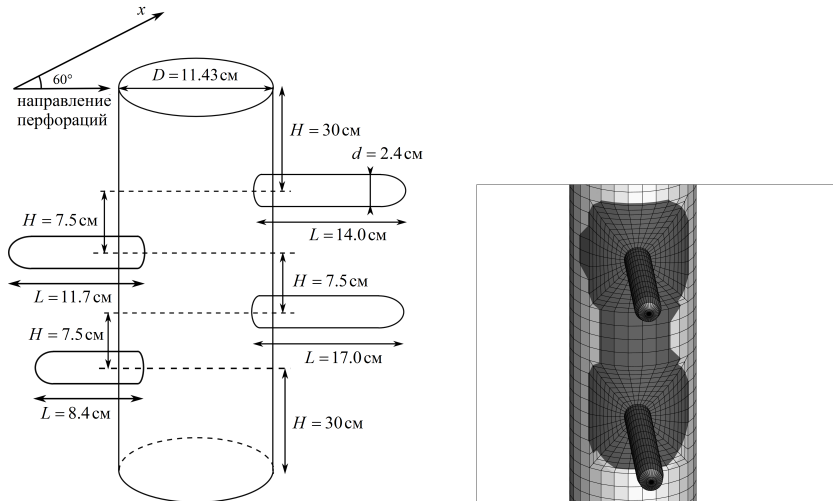


Рис. 3.19. Эскиз скважинной полости и смоченная зона в эксперименте 2.

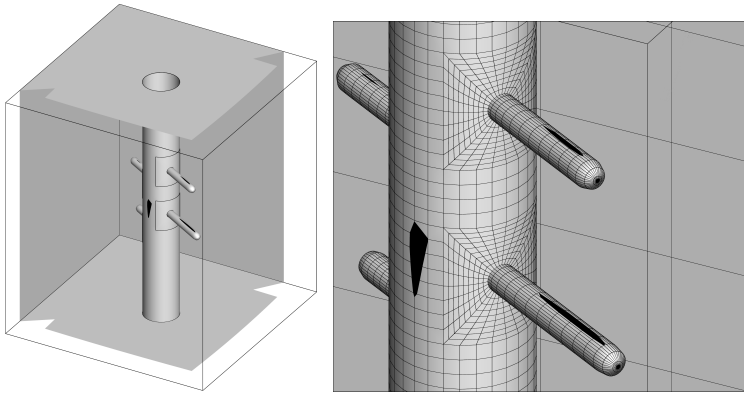


Рис. 3.20. Рассчитанные зоны разрушения $p_{init} = 48.2$ МПа.

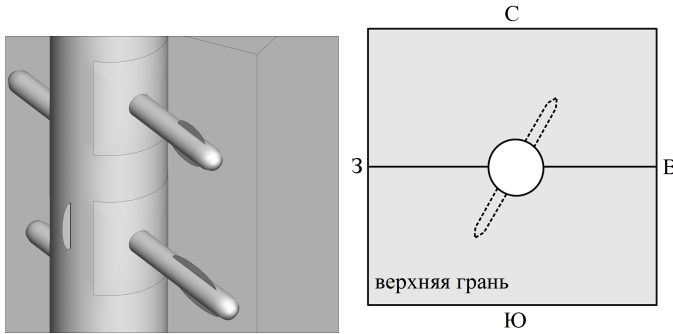


Рис. 3.21. Зародышевые трещины и эскиз распространения трещин в эксперименте 2.

Численный эксперимент предсказывает два вероятных сценария зарождения трещины. Первый сценарий предполагает инициацию, как и получилось в эксперименте, а второй предполагает развитие трещины вдоль перфораций. Второй сценарий тоже достаточно реалистичен, хотя и не наблюдался в эксперименте. Критическое давление для цилиндрической полости (коей в целом и является перфорация) в данном случае не превосходит 46 МПа. Очевидно, что давление в перфорации превосходит эту величину. По всей видимости, причинами того, что реализовался только один сценарий в эксперименте, являются возможные неоднородность материала куба и упрочнение стенок перфорации в процессе перфорирования.

Таким образом, в данном разделе проведено сравнение численной модели с натурным экспериментом. Получено хорошее соответствие результатов численного эксперимента натурному.

3.4. Пример моделирования разрушения перфорированной скважины и зарождения трещины от нее

После проведенной в § 2.3, 2.5 верификации методов расчета НДС и критериев инициации трещин рассмотрим инициацию и разрушение скважин при параметрах, соответствующих различным реальным месторождениям.

3.4.1. Постановка задачи

Предполагается, что порода однородна и изотропна. До бурения вертикальной скважины напряженное состояние породы определяется тензором напряжений σ^∞ , главные компоненты которого в рассматриваемом анализе равны:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 69 \text{ МПа}, \\ \sigma_{yy} &= 103.5 \text{ МПа}, \\ \sigma_{zz} &= 103.5 \text{ МПа}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Такие значения напряжений соответствуют геофизическим условиям, характерным для Приобского нефтяного месторождения (Ханты-Мансийский АО, РФ). Данное состояние породы считается исходным, и ему сопоставляются в модели нулевые смещения. Потом производится бурение скважины вдоль оси z . После окончания бурения в скважину плотно вставляется обсадная колонна. При этом стенки скважины и стенки обсадной колонны нагружены давлением бурения $p_d = 67$ МПа. Затем создается (образуется полость) перфорация в горизонтальной плоскости xy . Далее производится закачка жидкости гидроразрыва в скважину до тех пор, пока не произойдет инициация трещины. Требуется найти давление инициации p_{init} , т. е. давление, при котором образуется зародышевая трещина, а также место возникновения зародышевой трещины.

Считается, что порода и материал обсадной колонны (сталь) являются линейными упругими средами. Тогда свойства породы характеризуются модулем Юнга $E = 20.7$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.27$ и прочностью на разрыв $\sigma_c = 3.5$ МПа. Сталь характеризуется модулем Юнга $E = 200$ ГПа

и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Рассматривалась статическая задача упругости. Следовательно, поведение породы и обсадной колонны описываются уравнениями упругого равновесия (см. главу 2).

В качестве критерия разрушения использовался критерий МРН (3.2). Случай разрушения стальной колонны не рассматривался, так как прочность стали на разрыв $\sigma_c \sim 60$ МПа в разы превышает прочность породы. В силу принципа максимума критерий проверялся исключительно на поверхности S решаемой задачи. Вычислялся тензор напряжений σ_{ij} , затем — его главные значения $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$. Напряжение σ_3 сравнивалось с σ_c породы. Точки поверхности S , в которых максимальное растягивающее напряжение σ_3 превосходило напряжение разрушения σ_c , образовывали зоны разрушения. Критическое давление жидкости, при котором возникают зоны разрушения, считалось давлением инициации p_{init} .

Рассматривалась следующая геометрическая концепция, схематично изображенная слева на рис. 3.22. Скважина моделируется полостью в форме цилиндра диаметра $D = 10$ см достаточно большой высоты $H = 10$ м. Перфорация моделируется полостью в форме цилиндра длины $L = 10$ см и диаметра $d = 2$ см, затупленного на сферу. Перфорация ориентирована в горизонтальной плоскости xy под углом β к оси x , и ось перфорации пересекает ось скважины. Перфорация расположена строго по центру скважины.

В постановке задачи при наличии обсадной колонны считается, что в полость скважины плотно вставлена стальная труба высоты $H_0 = 9.5$ м толщиной $h = 5$ мм. Труба расположена симметрично по высоте в скважине и имеет отверстие диаметра d в месте расположения перфорации.

Так как постановки задачи упругости в случае необсаженной и обсаженной скважины значительно различаются, опишем их отдельно.

Модель необсаженной скважины

Для определения НДС породы необходимо решить задачу, отображенную в центре (подзадача 1) на рис. 3.22, где на всей поверхности скважины и перфорации задаются следующие напряжения:

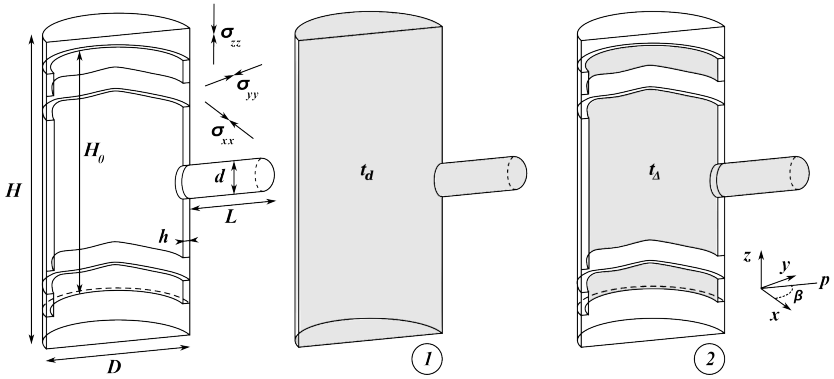


Рис. 3.22. Математическая постановка задачи и ее разбиение на две математических подзадачи.

$$\mathbf{t}_d = -p \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \mathbf{n}, \quad (3.13)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности. Здесь p — давление жидкости гидроразрыва. Тогда реальный тензор напряжений в породе определяется как

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^\infty, \quad (3.14)$$

где σ_{ij}^1 — тензор напряжений, вычисленный при решении подзадачи 1.

Модель обсаженной скважины

Для определения напряженно-деформированного состояния породы после бурения скважины необходимо решить задачу о предварительном нагружении, изображенную в центре (подзадача 2) на рис. 3.22. В этой задаче на всей поверхности скважины и перфорации задаются следующие напряжения:

$$\mathbf{t}_d = -p_d \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \mathbf{n}. \quad (3.15)$$

Решение этой подзадачи рассматривается относительно исходного предсжатого состояния породы напряжениями залегания (3.12).

Рассмотрим момент после установки обсадной колонны, пока давление в скважине равно давлению бурения. Поскольку

жидкость между обсадной колонной и скважиной действует на обе стороны с одинаковым давлением, то ее воздействие можно заменить условием полной сцепки (2.27) между стенками скважины и обсадной колонны. В этот момент они будут действовать друг на друга с тем же давлением p_d . Для определения изменения напряженно-деформированного состояния породы и обсадной колонны при увеличении давления жидкости необходимо решить задачу о нагружении, отображенную справа (подзадача 2) на рис. 3.22. В этой задаче на всей поверхности стальной колонны и перфорации задаются следующие напряжения:

$$\mathbf{t}_\Delta = -(p - p_d) \mathbf{n}, \quad (3.16)$$

которые соответствуют изменению давления в скважине. Все остальные поверхности свободны от напряжений, так как после установки обсадной колонны напряженно-деформированное состояние не изменилось.

Тогда реальный тензор напряжений в породе определяется как

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^\infty, \quad (3.17)$$

где σ_{ij}^1 — тензор напряжений, вычисленный при решении подзадачи 1, и σ_{ij}^2 — тензор напряжений, вычисленный при решении подзадачи 2.

Отметим, что в каждой из задач упругости тензор напряжений определяется согласно методике, описанной в разделе 2.7.

3.4.2. Основные параметры задачи и их влияние на давление инициации трещины от необсаженной скважины

Хотя модель инициации трещины от перфорированной скважины допускает всевозможные ориентации скважины и перфорации, в этом параграфе остановимся на двух наиболее распространенных случаях: вертикальной скважине с перфорацией, повернутой на угол β относительно направления максимальных горизонтальных напряжений, и направленной в направлении минимальных напряжений горизонтальной скважине с перфорацией, повернутой на угол β относительно вертикального направления (рис. 3.23). Для каждого из случаев прове-

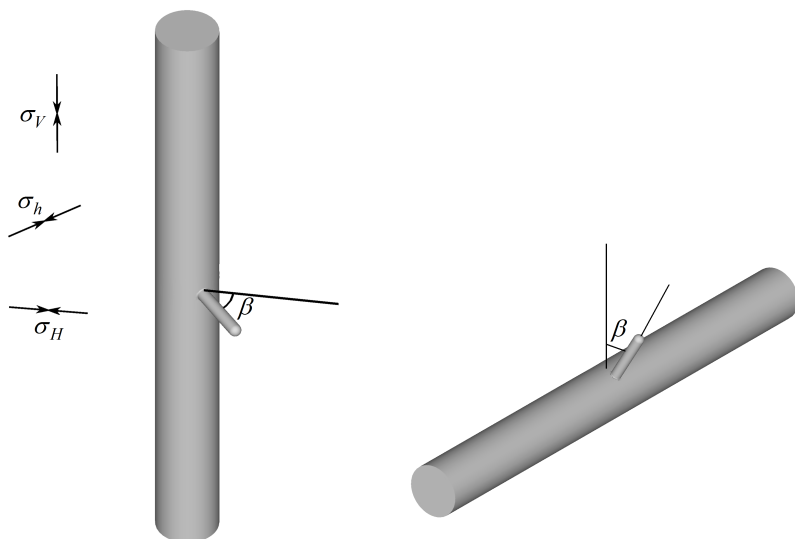


Рис. 3.23. Схема вертикальной (слева) и горизонтальной (справа) перфорированных скважин.

дем анализ чувствительности давления инициации трещины и ее ориентации к основным параметрам.

При моделировании этого примера предполагается, что скважина и перфорация нагружены одним и тем же давлением. Это соответствует постановке задачи в случае необсаженной скважины (§ 3.4.1) или плохому прилипанию цемента к стальной колонне [97]. Скважина моделировалась цилиндрической полостью высотой 10 м и диаметром 10 см, расположенной в бесконечном упругом однородном хрупком материале. Перфорация представляла из себя цилиндрическую полость длины 10 см и диаметром 2 см, конец которой затуплен на полусфере. Порода, характеризующаяся параметрами $E = 3 \cdot 10^6$ psi, $\nu = 0.27$, $\sigma_c = 500$ psi, была сжата на бесконечности напряжениями: $\sigma_V = 10000$ psi, $\sigma_H = 8300$ psi, $\sigma_h = 6700$ psi.

Для численных расчетов была построена сетка, состоящая из 648 треугольных квадратичных и четырехугольных биквадратичных элементов и содержащая 2568 узлов (7704 степеней свободы).

Ориентация перфорации

Зависимость давления инициации трещины (ДИТ) к углу перфорации показана на рис. 3.24. Как и ожидалось, минимальное давление инициации трещины соответствует перфорации, совпадающей с направлением максимальных горизонтальных напряжений σ_H ($\beta = 0^\circ$). С увеличением угла перфорирования β ДИТ непрерывно возрастает до своего максимума, который достигается при $\beta = 90^\circ$, соответствующего перфорации, совпадающей с направлением минимальных напряжений σ_h . Для заданных напряжений в естественном залегании при любом угле перфорации зона разрушения представляет собой два симметричных крыла, расположенных сверху и снизу основания перфорации, что соответствует образованию вертикальной продольной трещины (рис. 3.25). В этой области порода вокруг перфорации находится под действием добавочных растягивающих напряжений, вызванных давлением внутри скважины, что облегчает инициацию области в основании перфорации.

Для горизонтальной скважины, вопреки ожиданиям, минимальное ДИТ достигается не при расположении перфорации в направлении максимальных главных напряжений σ_V ($\beta = 90^\circ$), а при угле перфорации, примерно равном $\beta = 15^\circ$. При дальнейшем увеличении угла перфорации ДИТ непрерывно возрастает до достижения максимума при $\beta = 50^\circ$, а затем медленно снижается. Следует обратить внимание на резкий излом графика в точке максимума. Такое поведение ДИТ объ-

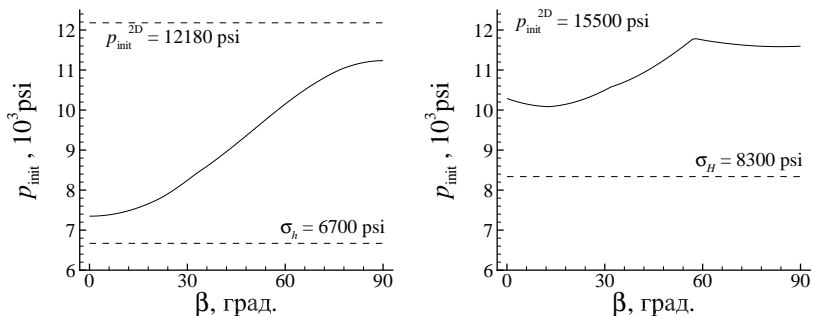


Рис. 3.24. Зависимость ДИТ от угла перфорации β (слева – вертикальная скважина, справа – горизонтальная скважина).

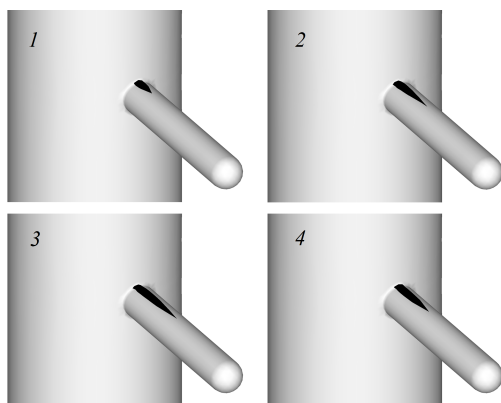


Рис. 3.25. Расположение зон инициации трещины для различных углов перфорации β (вертикальная трещина): 1 – $\beta = 0^\circ$, $p_{\text{init}} = 7350$ psi; 2 – $\beta = 30^\circ$, $p_{\text{init}} = 8250$ psi; 3 – $\beta = 60^\circ$, $p_{\text{init}} = 10200$ psi; 4 – $\beta = 90^\circ$, $p_{\text{init}} = 11200$ psi.

ясняется различным расположением зон разрушения для различных углов перфорации β . При сравнительно малых β зона разрушения состоит из двух подзон, расположенных симметрично относительно оси перфорации на пересечении перфорации и скважины (см. рис. 3.26, верх). Такие зоны разрушения приводят к образованию вертикальной трещины.

Когда угол перфорации достигает значения примерно 55° , появляется две зоны разрушения: первая – на пересечении скважины с перфорацией в направлении, близком к оси скважины, вторая – в окрестности кончика перфорации в направлении, перпендикулярном к оси скважины, в плоскости, нормальной к направлению действия минимальных напряжений, называемой предпочтительной плоскостью трещины (ППТ). Таким образом, при изменении угла перфорации в интервале $60^\circ < \beta < 80^\circ$ возможно образование двух типов трещин: продольной и поперечной (см. рис. 3.26, слева внизу). При дальнейшем увеличении угла перфорирования зона на стыке перфорации и скважины исчезает и поперечная трещина остается единственно возможной для $\beta > 80^\circ$ (см. рис. 3.26, справа внизу). Переход зоны разрушения с пересечения скважины и перфорации на кончик перфорации и является причиной излома графика ДИТ на правом графике рис. 3.24.

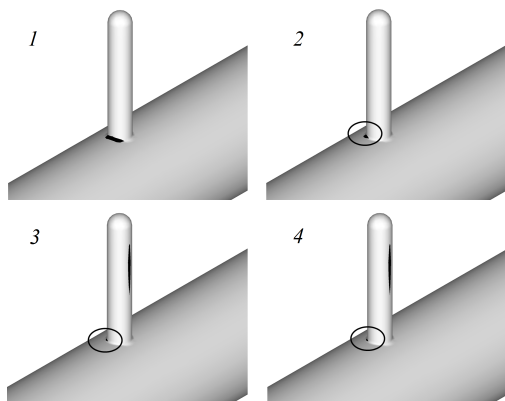


Рис. 3.26. Расположение зон инициации трещины для различных углов перфорации β (горизонтальная скважина): 1 — $\beta = 0^\circ$, $p_{\text{init}} = 10300$ psi; 2 — $\beta = 30^\circ$, $p_{\text{init}} = 10450$ psi; 3 — $\beta = 60^\circ$, $p_{\text{init}} = 11750$ psi; 4 — $\beta = 90^\circ$, $p_{\text{init}} = 11600$ psi.

Рисунок 3.24 показывает, что и для вертикальной, и для горизонтальной скважин при любом угле перфорирования ДИТ значительно меньше значения ДИТ для неперфорированной скважины p_{init}^{2D} , которое может быть посчитано аналитически как давление разрушения цилиндра в нагруженном материале.

Напряжения породы в естественном залегании

Здесь рассмотрим влияние напряжений в естественном залегании на инициацию трещины. Сперва скажем несколько слов об актуальности такого исследования. Разработано множество способов определения вертикального и минимального горизонтального напряжений в реальном пласте. Хотя на практике эти два значения не всегда известны при проведении гидроразрыва пласта, их измерение проводится намного чаще по сравнению с измерением среднего напряжения (максимального горизонтального). В нашем исследовании мы покажем влияние именно этого напряжения на место и давление инициации трещины в случае необсаженной скважины. Предположим, что минимальное горизонтальное и вертикальное напряжения были точно определены и зафиксированы их. Среднее напряжение будем варьировать в интервале от $\sigma_h = 6700$ psi до $\sigma_V = 10000$ psi. По-

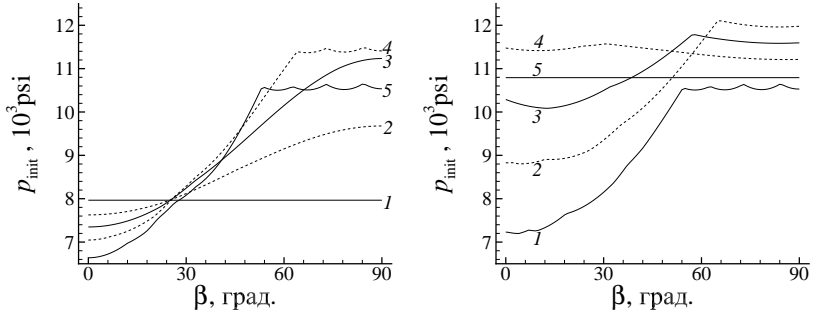


Рис. 3.27. Зависимости ДИТ от угла перфорации для различных значений среднего главного напряжения σ_H , psi: 6700 (1), 7550 (2), 8300 (3), 9150 (4), 10000 (5) (слева – вертикальная скважина, справа – горизонтальная скважина).

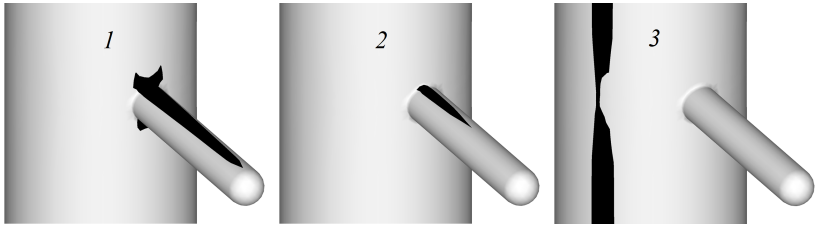


Рис. 3.28. Зоны разрушения для различных значений среднего главного напряжения (вертикальная скважина, $\beta = 60^\circ$): 1 – $\sigma_H = 6700$ psi, $p_{init} = 8000$ psi; 2 – $\sigma_H = 8300$ psi, $p_{init} = 10200$ psi; 3 – $\sigma_H = 10000$ psi, $p_{init} = 10500$ psi.

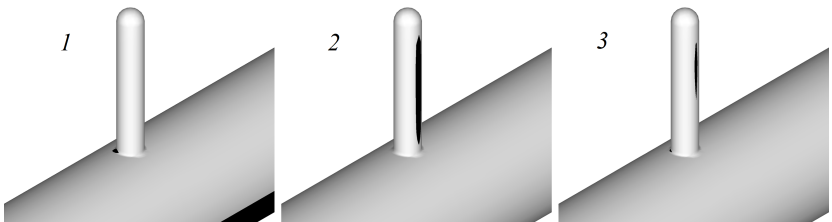


Рис. 3.29. Расположение зон разрушения для различных значений среднего напряжения (горизонтальная скважина, $\beta = 60^\circ$): 1 – $\sigma_H = 6700$ psi, $p_{init} = 10500$ psi; 2 – $\sigma_H = 8300$ psi, $p_{init} = 11750$ psi; 3 – $\sigma_H = 10000$ psi, $p_{init} = 10800$ psi.

лученные при таком исследовании зависимости ДИТ от угла перфорации при различных значениях среднего напряжения показаны на рис. 3.27.

Те же расчеты, проведенные для горизонтальной скважины, показаны на рис. 3.28 и на рис. 3.29. Результаты похожи на результаты, полученные для вертикальной скважины. Если разница между напряжениями, действующими в нормальной к оси скважины плоскости, велика и отклонение перфорации от вертикального направления больше, чем $50\text{--}60^\circ$, то может образоваться продольная трещина на скважине в вертикальном направлении. Максимальное значение ДИТ соответствует углу перфорации, при котором зона разрушения переходит с перфорации на поверхность скважины. Этот угол зависит от соотношения между главными напряжениями и варьируется в довольно узком интервале. Легко видеть, что ДИТ зависит от среднего напряжения. Эта зависимость наиболее сильно проявляется при правильной ориентации перфорации, т. е. при угле перфорации менее 40° . Как показано на рис. 3.27, для нулевого угла перфорации различие между ДИТ, рассчитанными при минимальном и максимальном значении среднего напряжения, достигает 60%. Таким образом, информация о среднем напряжении является существенной при предсказании ДИТ.

Диаметр перфорации

Также покажем влияние размеров перфорации на процесс инициации трещины. Форма, длина и диаметр перфорационных каналов могут варьироваться в зависимости от деталей технологии перфорирования, поэтому их влияние на разрушение и зарождение трещины должно быть исследовано. Рисунки 3.30–3.32 показывают зависимость ДИТ и положения зон разрушения от диаметра перфорации при его варьировании в интервале от 1 до 4 см (0.4–1.6 дюйма). На основе полученных результатов можно сделать вывод, что увеличение диаметра перфорации приводит к монотонному увеличению ДИТ (см. рис. 3.30, слева). В случае горизонтальной трещины соответствующее изменение ДИТ не монотонно и имеет довольно сложную форму (см. рис. 3.30, справа). Однако при варьировании диаметра перфорации в рассматриваемом интервале его влияние на ДИТ составляет менее 5–6%, что значительно меньше влияния

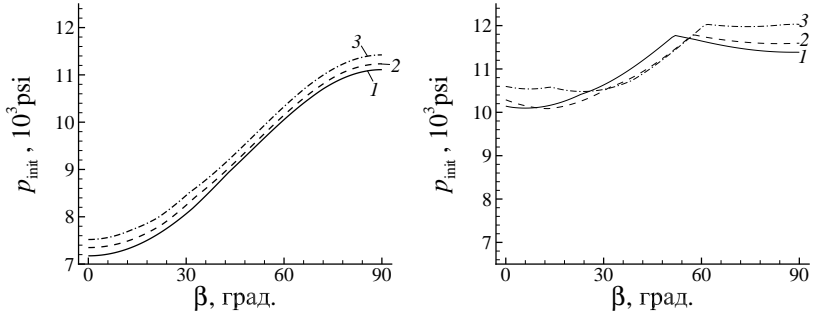


Рис. 3.30. Зависимость ДИТ от угла перфорирования при различных диаметрах перфорации: 1 — $d_{\text{perf}} = 1$ см; 2 — $d_{\text{perf}} = 2$ см; 3 — $d_{\text{perf}} = 4$ см (слева — вертикальная скважина, справа — горизонтальная скважина).

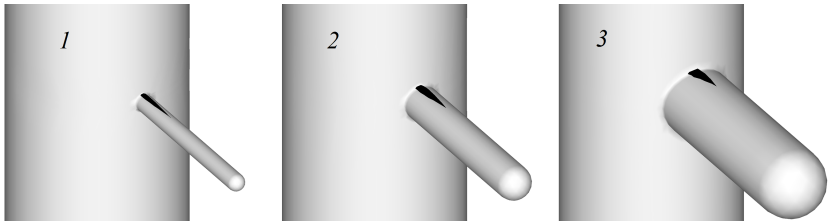


Рис. 3.31. Расположение зон разрушения для различных диаметров перфорации d_{perf} (вертикальная скважина, $\beta = 30^\circ$): 1 — $d_{\text{perf}} = 1$ см, $p_{\text{init}} = 11110$ psi; 2 — $d_{\text{perf}} = 2$ см, $p_{\text{init}} = 11230$ psi; 3 — $d_{\text{perf}} = 4$ см, $p_{\text{init}} = 11420$ psi.

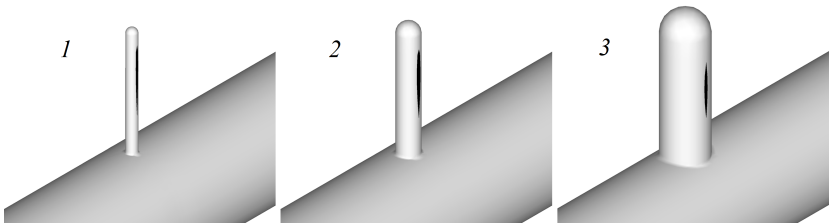


Рис. 3.32. Расположение зон разрушения для различных диаметров перфорации d_{perf} (горизонтальная скважина, $\beta = 90^\circ$): 1 — $d_{\text{perf}} = 1$ см, $p_{\text{init}} = 11390$ psi; 2 — $d_{\text{perf}} = 2$ см, $p_{\text{init}} = 11590$ psi; 3 — $d_{\text{perf}} = 4$ см, $p_{\text{init}} = 12030$ psi.

главных напряжений в естественном залегании и направлении перфорации. Таким образом, можно сделать вывод, что влияние диаметра перфорации на ДИТ и ориентацию трещины незначительно (см. рис. 3.31, 3.32). Следует отметить, что приведенное исследование проведено в рамках предположений о хрупком разрушении породы с использованием критерия МРН и без учета пластических или неупругих эффектов, эффекта размера и т. д., который может изменить полученные выводы.

Длина перфорации

Влияние длины перфорации на ДИТ и расположение зон разрушения показаны на рис. 3.33–3.35. Длина перфорации варьировалась от 10 до 50 см. В случае вертикальной скважины длина перфорации не влияет на ДИТ (см. рис. 3.33, слева), так как трещина всегда зарождается в окрестности начала перфорации (см. рис. 3.34). То же отсутствие влияния наблюдается при малых углах перфорации ($\beta < 50^\circ$) в случае горизонтальной скважины, когда трещина зарождается на границе скважины и перфорации (см. рис. 3.33, справа). Но при больших углах перфорации $50\text{--}90^\circ$ разрушение происходит в окрестности кончика перфорации (см. рис. 3.35). Дополнительные напряжения, вызванные давлением в скважине, препятствуют разрушению перфорации у скважины, поэтому трещине проще зародиться на удалении от скважины. Поэтому при больших углах перфорирования увеличение длины перфорации ведет к уменьшению

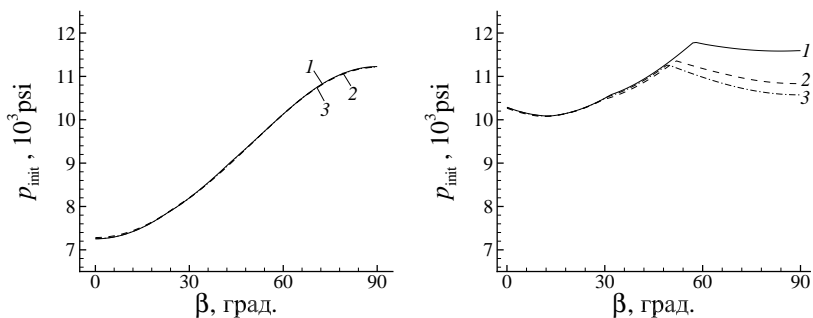


Рис. 3.33. Зависимость ДИТ от угла перфорирования при различных длинах перфорации L_{perf} , см: 1 — 10, 2 — 25, 3 — 50 (слева — вертикальная скважина, справа — горизонтальная скважина).

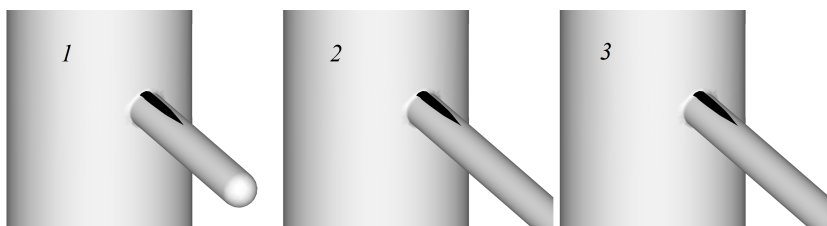


Рис. 3.34. Расположение зон разрушения для различных длин перфорации L_{perf} (вертикальная скважина, $\beta = 75^\circ$): 1 — $L_{\text{perf}} = 10$ см, $p_{\text{init}} = 10940$ psi; 2 — $L_{\text{perf}} = 25$ см, $p_{\text{init}} = 10940$ psi; 3 — $L_{\text{perf}} = 50$ см, $p_{\text{init}} = 10940$ psi.

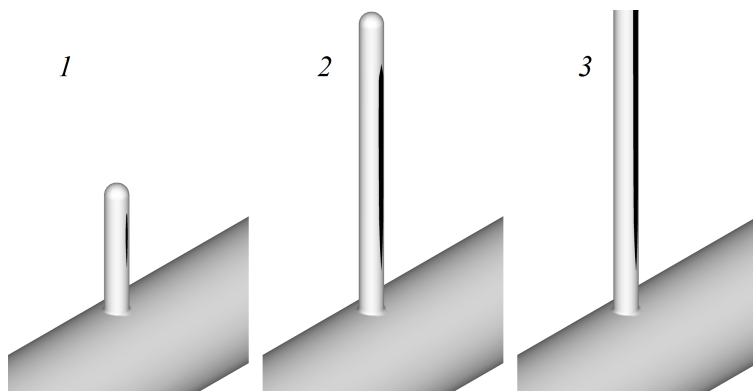


Рис. 3.35. Расположение зон разрушения для различных длин перфорации L_{perf} (горизонтальная скважина, $\beta = 90^\circ$): 1 — $L_{\text{perf}} = 10$ см, $p_{\text{init}} = 11600$ psi; 2 — $L_{\text{perf}} = 25$ см, $p_{\text{init}} = 10830$ psi; 3 — $L_{\text{perf}} = 50$ см, $p_{\text{init}} = 10580$ psi.

ДИТ. Однако, как и в предыдущем случае, эффект не сильно заметен и не превосходит 15% для рассматриваемых параметров.

Хорошо видно, что перфорация главным образом влияет на давление инициации, форма зоны разрушения меняется незначительно. При заданных условиях давление инициации достаточно быстро (примерно начиная с длины 25 см) выходит на свою асимптоту и далее не оказывает существенного влияния на процесс.

Форма перфорации

Отдельно было проверено влияние формы и длины перфорации на давление инициации и зоны разрушения. Перфорация

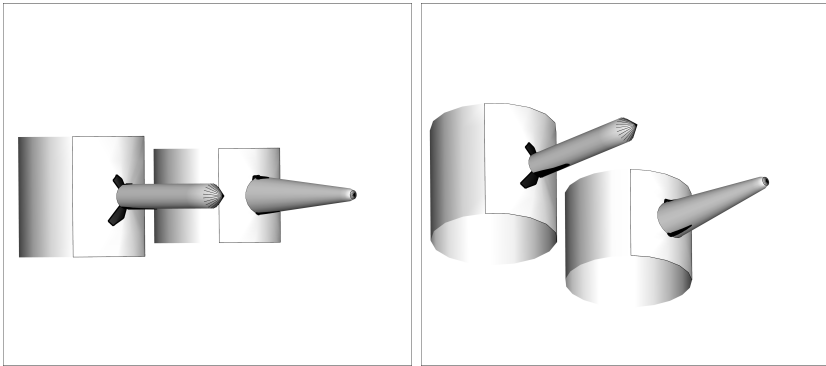


Рис. 3.36. Расположение зон разрушения для случая разных форм перфорации при $\beta = 30^\circ$.

по своей форме представляет собой, как правило, относительно гладкую вытянутую поверхность [44], при этом длина перфорации L зачастую значительно больше ее диаметра d . Поэтому было предложено смоделировать перфорацию альтернативной формы в виде конуса, затупленного на сферу. Основание конуса $d_1 = 3$ см, радиус сферы $d_1 = 1$ см. Длина перфорации $L = 10$ см.

Для случая с конической перфорацией была построена сетка, состоящая из 4074 треугольных линейных элементов и содержащая 2064 узла (6192 степеней свободы).

Расчитанные зоны разрушения показаны на рис. 3.36. Месторасположения зон разрушения практически совпадают, а давление инициации получилось одинаковым $p_{\text{init}} = 86$ МПа. Следовательно, форма перфорационной полости практически не влияет на процесс инициации трещины гидроразрыва.

3.4.3. Влияние обсадной колонны на процесс зарождения трещины

Был проведен поиск давления инициации p_{init} в зависимости от угла β (рис. 3.37). Наименьшее давление, как и ожидалось, достигнуто при $\beta = 0^\circ$, т. е. когда перфорация направлена в направлении основного развития трещины гидроразрыва поперек минимальных сжимающих напряжений. В случае необсажен-

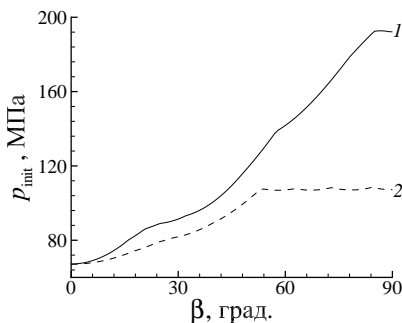


Рис. 3.37. Зависимость давления инициации от угла β : 1 – для обсаженной и 2 – необсаженной скважин.

ной скважины давление инициации p_{init} возрастает до своего предельного значения при $\beta = 55^\circ$ и затем при увеличении угла остается неизменным. Это объясняется тем, что при $\beta \geq 55^\circ$ разрушение происходит на поверхности скважины и его месторасположение остается одним и тем же. В случае обсаженной скважины давление инициации p_{init} значительно быстрее увеличивается и достигает предельного значения при $\beta = 90^\circ$.

При $\beta = 0^\circ$ зона разрушения расположена строго вертикально на стыке полости скважины и перфорации и в случае необсаженной, и обсаженной скважины, как изображено на рис 3.38.

Зоны разрушения расположены симметрично относительно перфорации, что вызвано симметрией задачи. При увеличении угла β зоны разрушения в случае необсаженной скважины смещаются в сторону оси x , оставаясь на стыке полости скважины с перфорацией, как показано на рис 3.39. В случае обсаженной зоны разрушения смещаются дальше от полости скважины. Зона разрушения сохраняет узкую вытянутую форму вдоль по перфорации.

При достижении критического угла $\beta = 55^\circ$ зона разрушения в случае необсаженной скважины целиком и полностью переходит на боковую поверхность скважины, как изображено слева на рис 3.40. Перфорации в этом случае игнорируются, как показано слева на рис. 3.41.

Согласно решению задачи о нагружении бесконечной цилиндрической полости [186], давление, необходимое для раз-

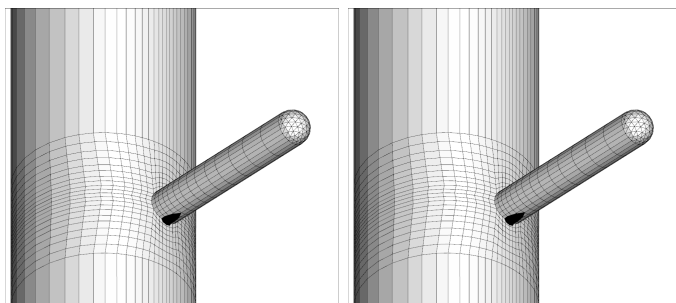


Рис. 3.38. Зоны разрушения для необсаженной (слева; $p_{init} = 70$ МПа) и обсаженной (справа; $p_{init} = 70$ МПа) скважин при $\beta = 0^\circ$.

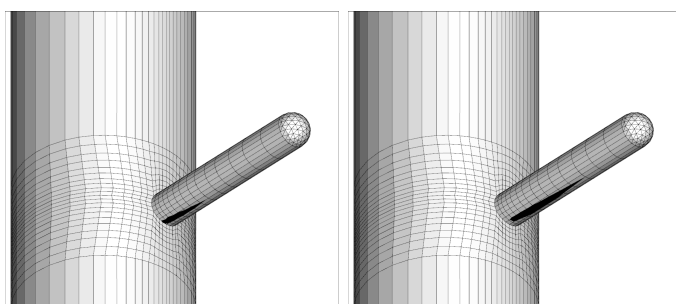


Рис. 3.39. Зоны разрушения для необсаженной (слева; $p_{init} = 80$ МПа) и обсаженной (справа; $p_{init} = 90$ МПа) скважин при $\beta = 25^\circ$.

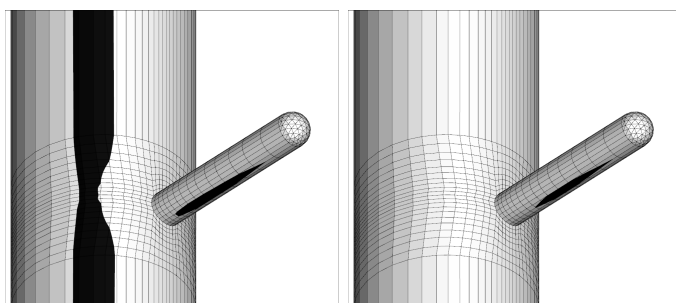


Рис. 3.40. Зоны разрушения для необсаженной (слева; $p_{init} = 102$ МПа) и обсаженной (справа; $p_{init} = 121$ МПа) скважин при $\beta = 50^\circ$.

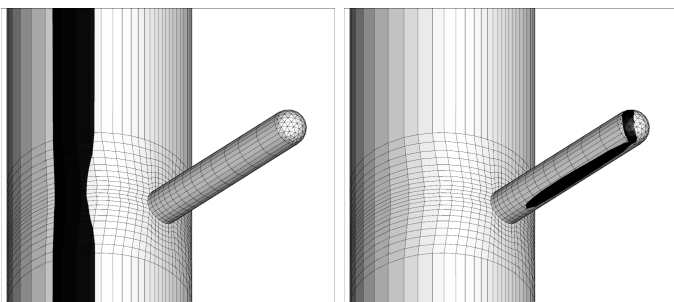


Рис. 3.41. Зоны разрушения для необсаженной (слева; $p_{\text{init}} = 105$ МПа) и обсаженной (справа; $p_{\text{init}} = 141$ МПа) скважин при $\beta = 60^\circ$.

рыва ее боковины, равно 107 МПа. Таким образом, давление в скважине достигло уровня, при котором просто порвется ее боковина, что мы и наблюдаем.

Как показывают результаты расчетов, в случае обсаженной скважины зона разрушения всегда оказывается исключительно на перфорации, в отличие от случая необсаженной скважины, что влечет за собой значительное увеличение давления инициации p_{init} . При малых углах, так же как и в случае необсаженной скважины, инициация происходит на стыке скважина–перфорация. При увеличении угла зона инициации удаляется от скважины вдоль перфорации, достигая при углах $\beta \geq 50^\circ$ ее кончика.

3.5. Пример моделирования разрушения перфорированной скважины глубокого залегания

В настоящем параграфе разработанная методика будет применена для предсказания давления инициации трещины, места ее зарождения и ориентации для параметров, соответствующих месторождению Амин (Amin Formation) в Омане, характеризующемуся глубоким залеганием газа. Проведение гидро-разрыва в таких месторождениях сопровождается сложностями, обусловленными сильными сжимающими напряжениями и

высокой прочностью породы, поэтому моделирование разрушения при таких параметрах представляет несомненный интерес [36–38, 187].

3.5.1. Постановка задачи

Параметры для настоящего исследования основаны на существующей трехмерной геомеханической модели месторождения Амин и данными, полученными на основе измерений при проведении гидроразрывов. Напряжения в естественном залегании были известны для всего месторождения, состоящего из четырех блоков и трех зон, упорядоченных по глубине залегания: верхней, средней и нижней [188]. На рис. 3.42, представленном в [188], показаны расположения блоков месторождения. Так как упругие параметры породы в данном месторождении варьируются в узком диапазоне, то для уменьшения количества расчетов был выбран один набор параметров породы: модуль Юнга $E = 48.8$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.1257$. Геометрические размеры скважины и перфорации были выбраны следующими:

- диаметр скважины $d_w = 149.2$ мм,
- диаметр перфорации $d_{\text{perf}} = 10.2$ мм,
- глубина перфорации $L_{\text{perf}} = 200$ мм,
- внешний диаметр стальной колонны $d_{\text{out}} = 114.3$ мм,
- внутренний диаметр стальной колонны $d_{\text{in}} = 95$ мм.

Стальная обсадная колонна характеризуется модулем Юнга $E = 200$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.1257$. Свой-



Рис. 3.42. Блоки месторождения Амин.

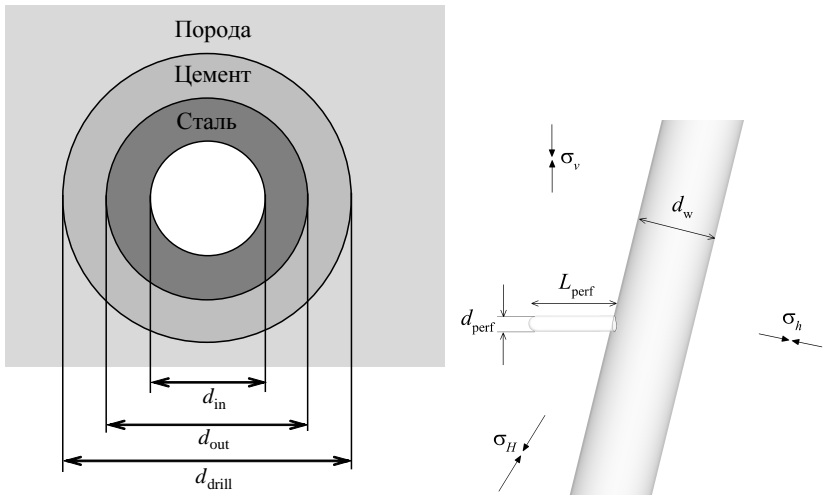


Рис. 3.43. Геометрическая концепция скважины с перфорацией.

ства цементной обсадной колонны считались равными свойствам породы.

В расчетах определялось только ДИТ, для распространения трещины необходимо прикладывать дополнительное давление, но это значение зависит от многих факторов и требует применения трехмерных моделей распространения, что выходило за рамки исследования. Для определения ДИТ использовались МГЭ и критерий разрушения МРН.

Перейдем к более четкой постановке задачи. Цилиндрическая скважина с диаметром $d_{drill} = 149.2$ мм расположена в породе с упругими свойствами, характеризующимися модулем Юнга $E = 48.8$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.1257$ и прочностью на разрыв $\sigma_c = 5$ МПа, нагруженной напряжениями в естественном залегании вертикальным σ_v , горизонтальными минимальным σ_h и максимальным σ_H (рис. 3.43, справа). Стальная колонна с модулем Юнга $E = 200$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.1257$, внутренним диаметром $d_{in} = 95$ мм и внешним диаметром $d_{out} = 114.3$ мм помещена внутрь скважины. Пространство между ними заполнено цементом со свойствами, совпадающими со свойствами породы (см. рис. 3.43, слева). Перфорация с диаметром $d_{perf} = 10.2$ мм и глубиной $L_{perf} = 200$ мм расположена ортогонально сква-

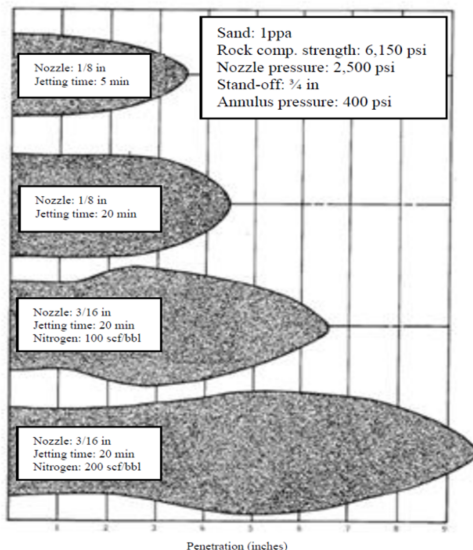


Рис. 3.44. Форма реальных перфораций (взято из [189]).

жине (см. рис. 3.43, справа). Большинство перфораций делаются с помощью пескоструйной машины, поэтому реальная форма перфорации (см. рис. 3.44 [189]) отличается от цилиндра с закруглением на конце, которая использовалась в модели. Однако в § 3.4.2 показано, что форма перфорации слабо влияет на процесс инициации трещины, поэтому такая идеализация представляется допустимой, учитывая сложность построения сеток и вычислительную сложность расчетов с реальной перфорацией.

Формализация ориентации скважины и перфорации

Ориентация скважины и направления действия напряжений в естественном залегании обычно задаются в системе координат, связанной с поверхностью Земли. Поскольку в настоящем исследовании гравитация не учитывается, то используется относительная система координат, привязанная к направлениям действия главных напряжений в естественном залегании. Направление оси x совпадает с направлением действия максимальных горизонтальных напряжений σ_H , y – минимальных σ_H , а ось z направлена вертикально, т. е. совпадает с направ-

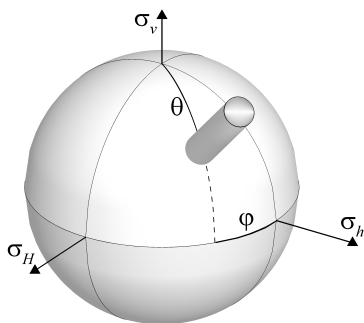


Рис. 3.45. Ориентация скважины по отношению к напряжениям в естественном залегании.

лением действия σ_v . Ориентации скважины и перфорации задаются в этой системе координат. Ориентация скважины — полярным углом θ , откладываемым от вертикали, и азимутальным углом ϕ , откладываемым от направления действия минимальных напряжений, как показано на рис. 3.45.

Перфорация находится в плоскости, ортогональной скважине, и ее направление задается одним параметром. Этим параметром является угол перфорирования, определение которого различно в зависимости от того, совпадает ли направление скважины с направлением действия минимальных горизонтальных напряжений σ_h или нет. Если ось скважины не совпадает с направлением действия напряжений σ_h (рис. 3.46, слева), то существует пересечение плоскости, ортогональной направлению действия минимальных горизонтальных напряжений (напомним, что эта плоскость называется предпочтительной плоскостью трещины, ППТ), и плоскости, ортогональной скважине (назовем ее плоскостью перфорации, ПП). Перфорацию, параллельную линии этого пересечения, назовем «идеальной» перфорацией, так как можно ожидать, что такая перфорация приведет к инициации трещины, лежащей в ППТ, что потребует минимального ДИТ. Углом перфорации назовем угол, на который необходимо повернуть перфорацию, чтобы она стала «идеальной». Отметим, что в силу симметрии задачи существует два направления «идеальной» перфорации, причем любое из них может быть выбрано в качестве основного без изменения НДС породы и результатов расчетов. Если

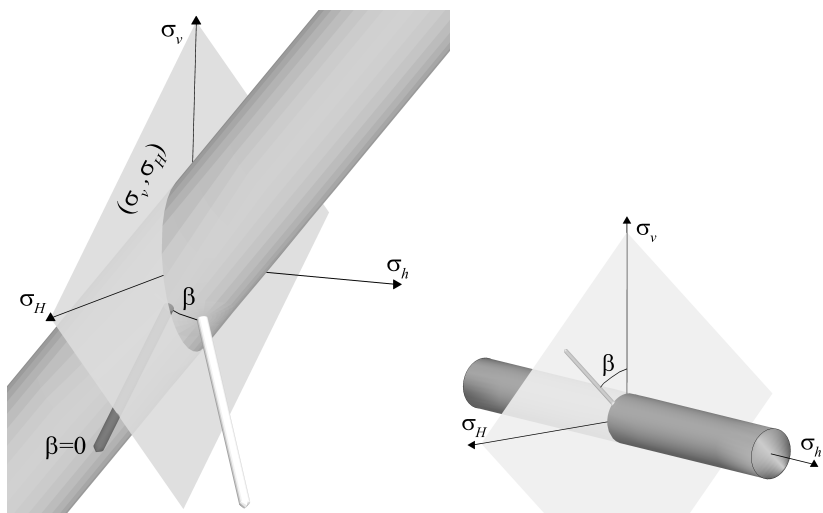


Рис. 3.46. Определение угла перфорации в общем случае (слева) и в частном случае совпадения ППТ и ПП (справа).

скважина параллельна направлению действия минимальных напряжений σ_h , то ППТ и ПП совпадают, все перфорации могут быть названы «идеальными» с точки зрения предыдущего метода определения ориентации. В этом частном случае переопределим угол перфорации как угол между вертикальным направлением σ_v и направлением перфорации (см. рис. 3.46, справа).

Приближенный учет влияния обсадной колонны

Для расчета НДС вокруг скважины необходимо учитывать деформации породы, цементной обсадной колонны и стальной колонны. Схема поперечного сечения реальной обсаженной скважины показана на рис. 3.47, слева. Одним из способов решения такой задачи является использование многозонного МГЭ как, например, в [34]. Однако, многозонный МГЭ требователен с вычислительной точки зрения и мало применим в случае необходимости проведения множества расчетов. Поэтому был использован приближенный способ учета влияния обсадной колонны, описанный также в [34]. Хотя НДС цемента и обсадной колонны не рассчитываются, они учитываются путем

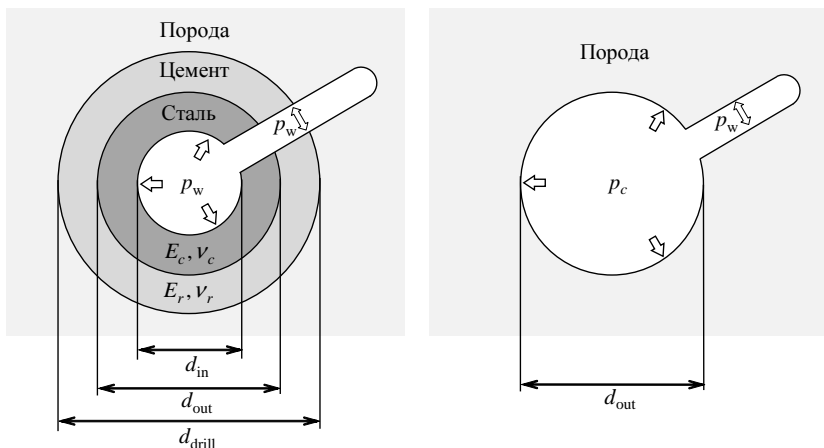


Рис. 3.47. Схема поперечного сечения обсаженной скважины (слева) и ее приближение, использованное в модели (справа).

введения ослабления давления на поверхности скважины. При этом сложная конструкция обсаженной скважины заменяется приближенной (см. рис. 3.47) и предполагается, что упругие свойства цемента совпадают с упругими свойствами породы. На поверхности перфорации S_{perf} задавалось давление внутри обсадной колонны p_w :

$$p(\mathbf{x}) = p_w, \quad \mathbf{x} \in S_{\text{perf}}, \quad (3.18)$$

на поверхности скважины S_c задавалось ослабленное давление, рассчитанное по следующей формуле:

$$p(\mathbf{x}) = p_0 + k(p_w - p_0) = p_c, \quad \mathbf{x} \in S_c. \quad (3.19)$$

Здесь p_0 — давление в обсадной колонне в конце цементирования, а k — коэффициент ослабления давления обсадной колонной.

Давление в обсадной колонне в конце цементирования может быть оценено как гидростатическое давление жидкого цемента. Для цемента плотностью $\rho_{\text{cem}} = 1800 \text{ кг/м}^3$, ускорения свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$ и глубины скважины в $h = 5000 \text{ м}$ значение давления равно $p_0 = 90 \text{ МПа}$.

Релаксационный коэффициент k рассчитывается аналитически на основе решения задачи об обсаженной неперфорированной скважине, нагруженной давлением, показанной на

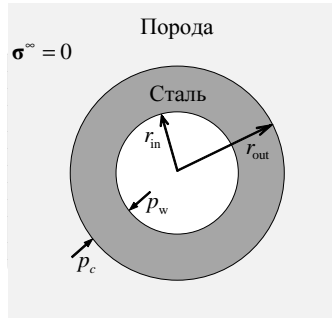


Рис. 3.48. Схема вспомогательной задачи для расчета коэффициента ослабления давления.

рис. 3.48. Стальная колонна внутреннего радиуса r_{in} и внешнего радиуса r_{out} с параметрами μ_c, λ_c расположена в отверстии в бесконечной породе с параметрами μ_r, λ_r . Колонна изнутри нагружена давлением p_w , порода не нагружена на бесконечности. Требуется найти коэффициент ослабления давления, определяемый как $k = p_c/p_w$, где p_w – давление на границе колонны и породы. Решение этой задачи может быть выведено из решения задачи Ламэ о составной трубе (см., например, [100]) или найдено в [190] непосредственно для этой задачи:

$$k = \frac{p_c}{p_w} = \frac{A}{B + C}, \quad A = \frac{(r_{in}^2 + r_{out}^2)\mu_c + r_{in}^2\lambda_c}{(r_{out}^2 - r_{in}^2)\mu_c(\mu_c + \lambda_c)},$$

$$B = \frac{(r_{in}^2 + r_{out}^2)\mu_c + r_{in}^2\lambda_c}{(r_{out}^2 - r_{in}^2)\mu_c(\mu_c + \lambda_c)}, \quad C = \frac{1}{\mu_r}. \quad (3.20)$$

Для заданных параметров стали и породы коэффициент ослабления давления получился равным $k = 0.45$.

Используемые при моделировании инициации трещины уравнения упругого равновесия не включают в себя учет пористости породы и пластового давления, однако используемая модель может применяться и для описания пористых сред (линейно-упругих, но неоднородных) в следующих случаях:

- если отсутствует поровая жидкость;
- если поровая жидкость в рассматриваемой области находится при постоянном давлении;
- если движение поровой жидкости отсутствует или пренебрежимо мало в рассматриваемый промежуток времени.

3.5.2. Влияние сетки

Для оценки численной погрешности были проведены расчеты с использованием четырех расчетных сеток (рис. 3.49). Каждая сетка сгущалась в два раза по сравнению с предыдущей в каждом направлении.

Влияние качества сетки наибольшим образом проявляется при расчете ДИТ при угле перфорации меньше 45° , как видно на рис. 3.50 (слева), на котором показан случай $\theta = 90^\circ$ и $\phi = 45^\circ$. Для углов β между 45 и 90° наблюдается более быстрая численная сходимость, и разница между ДИТ, рассчитанными на разных сетках, становится пренебрежимо малой уже на грубых сетках, как показано на рис. 3.50 (справа). Разница между ДИТ, рассчитанным на сетках с 2520 и 5374 элементами, не превышает нескольких процентов, поэтому сетка 2520 использовалась в дальнейших расчетах.

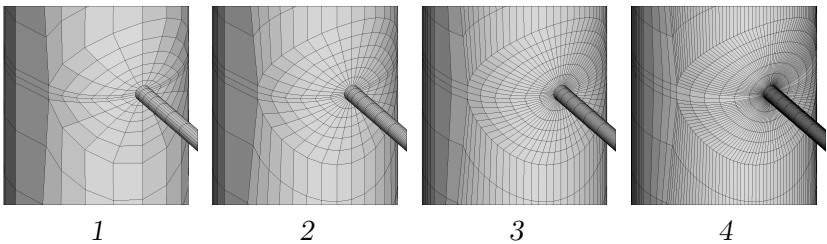


Рис. 3.49. Примеры расчетных сеток. Количество элементов 712 (1), 1288 (2), 2520 (3), 5374 (4).

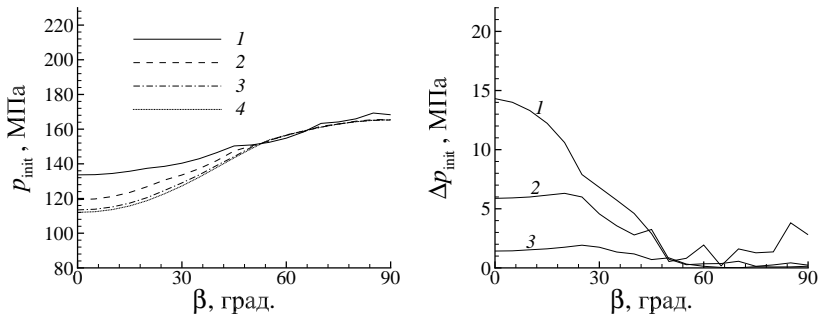


Рис. 3.50. Зависимость ДИТ от угла перфорации, полученная при использовании различных сеток. (северный блок, средняя зона). 1 – 4 см. на рис. 3.49.

3.5.3. Влияние угла перфорации β

Влияние ориентации перфорации было исследовано для четырех вариантов ориентации скважины: наклоненная и горизонтальная скважины, ориентированные в направлении минимальных горизонтальных напряжений ($\theta = 45^\circ$, $\phi = 90^\circ$ и $\theta = 90^\circ$, $\phi = 0^\circ$); горизонтальная скважина, ориентированная между направлениями минимального и максимального горизонтальных напряжений, для которой наблюдается минимальное значение ДИТ ($\theta = 90^\circ$, $\phi = 40^\circ$), и горизонтальная скважина, ориентированная в направлении максимальных горизонтальных напряжений ($\theta = 90^\circ$, $\phi = 90^\circ$).

На рис. 3.51 показано влияние угла перфорации β на ДИТ для средней зоны северного блока. На рисунках показаны зоны, в которых инициируется продольная и ортогональная к скважине поперечная трещина. В остальных случаях наблюдалась

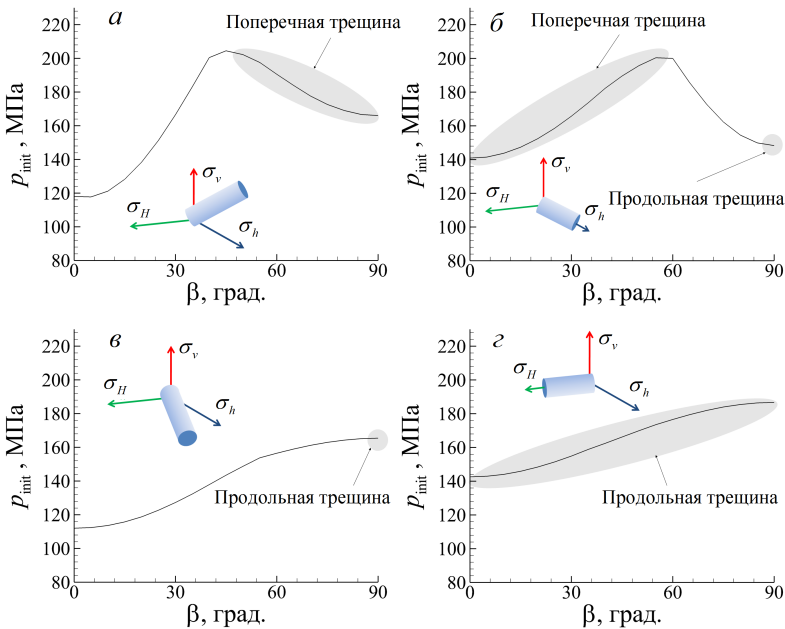


Рис. 3.51. Зависимость ДИТ от угла перфорации. Отмечены зоны образования ортогональной к скважине поперечной трещины и продольной трещины. $a - \theta = 45^\circ$, $\phi = 0^\circ$, $б - \theta = 90^\circ$, $\phi = 0^\circ$, $в - \theta = 90^\circ$, $\phi = 40^\circ$, $з - \theta = 90^\circ$, $\phi = 90^\circ$.

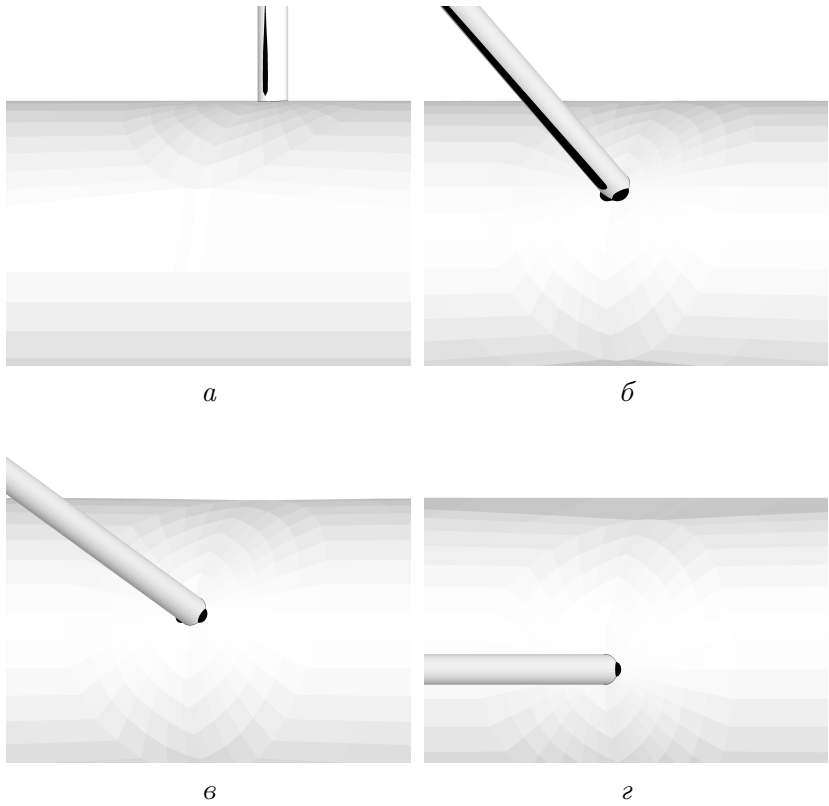


Рис. 3.52. Зоны инициации трещины для скважины, направленной в направлении минимальных горизонтальных напряжений σ_h , при различных углах перфорации β : 0 (а), 60 (б), 70 (в), 90° (г).

инициация наклоненной к скважине трещины. Во всех случаях минимальное ДИТ наблюдалось для перфорации, лежащей в ППТ. Легко видеть, что ориентация перфорации сильно влияет на ДИТ. Например, отклонение перфорации на 30° увеличивает ДИТ на 30 % по сравнению с минимальным значением. Для скважины с углами ориентации $\theta = 90^\circ$, $\phi = 40^\circ$ влияние угла перфорации меньше, то же отклонение перфорации на 30° увеличивает ДИТ всего на 15 %. В случае горизонтальной скважины, пробуренной в направлении $\theta = 90^\circ$, $\phi = 90^\circ$, при любом угле перфорации инициируется продольная трещина.

На рис. 3.52 приведены зоны инициации трещины для скважины, ориентированной в направлении минимальных горизон-

тальных напряжений ($\theta = 90^\circ$, $\phi = 0^\circ$) и различных углов перфорации β . Отметим, что при такой ориентации скважины угол β есть угол отклонения перфорации от вертикального направления σ_v . Несмотря на то что все перфорации лежат в ППТ, не всегда трещина инициируется в этой плоскости. Так, при $\beta = 0^\circ$ инициируется поперечная трещина, лежащая в ППТ, а при $\beta = 90^\circ$ инициируется продольная трещина, которая ортогональна ППТ. Переход от поперечной трещины к продольной происходит в интервале $\beta = 60 - 70^\circ$.

3.5.4. Изменение давления инициации вдоль перфорации

Интересным результатом численных исследований процесса инициации является эффект изменения ориентации инициированной трещины вдоль перфорации при увеличении давления внутри скважины. На рис. 3.53 показаны распределения максимальных собственных значений тензора напряжений при различных давлениях внутри скважины для случая скважины, ориентированной в направлении минимальных горизонтальных напряжений. При малом давлении в скважине инициируется продольная трещина, параллельная горизонтальным напряжениям (рис. 3.53, а). При увеличении давления увеличиваются и напряжения на перфорации, в результате чего появляется и трещина на ней (рис. 3.53, б). При большом давлении в скважине инициируется и продольная трещина на

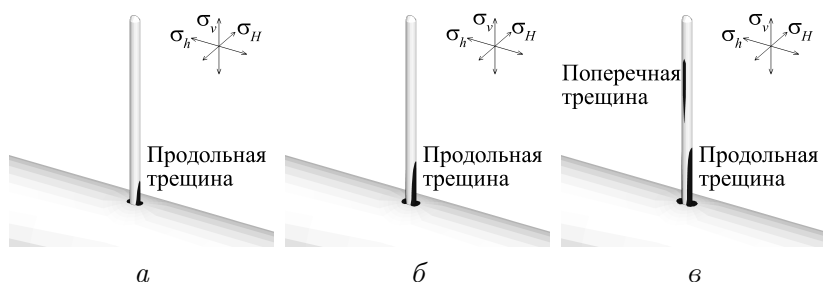


Рис. 3.53. Изменение ориентации трещины вдоль перфорации при повышении давления в скважине: а — $p_w = 183$ МПа, б — $p_w = 200$ МПа, в — $p_w = 210$ МПа.

основании перфорации, и поперечная в середине перфорации (рис. 3.53, в). Этот эффект наблюдается при проведении гидроразрыва (в англоязычной литературе он известен как «stress cage effect») и описывается и другими моделями. Уравнения для двумерного случая плоскости с отверстием предложены Киршем в 1898 году [191] и представлены в [43] применительно к случаю разработки углеводородов. Демонстрация этого эффекта в трехмерном случае настоящей моделью может служить одним из примеров ее валидации. Практическая его ценность заключается в возможности создания поперечной трещины путем резкого повышения давления в скважине, до того как продольная трещина успеет достичь больших размеров.

Как видно из рис. 3.53, трещина зарождается на середине перфорации, а не в окрестности кончика. Это дает основание предположить, что увеличение длины перфорации сверх 200 мм не производит положительного эффекта на инициацию трещины. Таким образом, уменьшение длины перфорации не повлияет на процесс инициации, но позволит упростить и удешевить сам процесс перфорации. Так, уменьшение времени работы пескоструйной машины с 15 до 8 минут при перфорировании одной из скважин месторождения Амин не сказалось на качестве зародышевой трещины и последующего гидроразрыва. В то же время это уменьшило объем материалов, время операции, сопутствующий риск и эрозию перфорационного канала. Кроме того, снижение требований к длине перфорации позволяет заменять пескоструйные машины более простыми кумулятивными зарядами.

3.5.5. Влияние обсадной колонны

Для оценки влияния обсадной колонны было проведено сравнение давления инициации и положения трещин для обсаженных и необсаженных скважин. Распределение максимальных собственных значений тензора напряжений для горизонтальной скважины, ориентированной в направлении минимальных горизонтальных напряжений, с вертикальной перфорацией показано на рис. 3.54. В случае обсаженной скважины иницируется поперечная трещина, тогда как в случае необсаженной — продольная. На рис. 3.55 показаны зависимости ДИТ от пара-

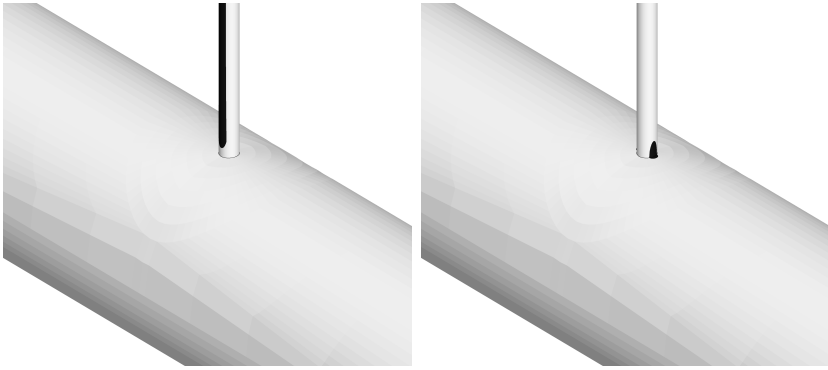


Рис. 3.54. Зоны инициации трещин для обсаженной (слева) и необсаженной (справа) скважин ($\theta = 90^\circ$, $\phi = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$).

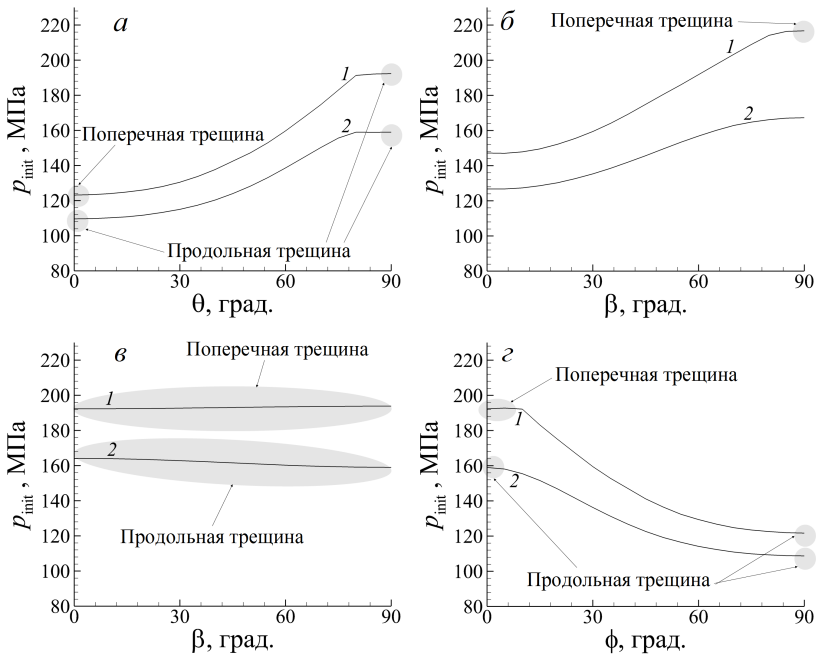


Рис. 3.55. Зависимость ДИТ от параметров ориентации скважины и перфорации для обсаженной (1) и необсаженной (2) скважин. а – г см. рис. 3.51.

метров ориентации скважины и перфорации для обсаженной и необсаженной скважин для верхней зоны северного блока месторождения. Выделены зоны параметров, соответствующие

инициации продольной и ортогональной к скважине поперечной трещины. На основе приведенных зависимостей можно сделать следующие выводы.

- Наклон скважины от вертикального направления к горизонтальному приводит к увеличению ДИТ для любого типа скважин. (см. рис. 3.55). Это увеличение более выражено (на 30 %) для обсаженной скважины. Смена направления зародышевой трещины с поперечного на продольное наблюдается только для обсаженной скважины.
- Смена направления перфорации с вертикального на горизонтальное в случае горизонтальной скважины приводит к увеличению ДИТ на 45 % для обсаженной скважины и на 27 % для необсаженной.
- Если скважина находится в вертикальной плоскости, содержащей направление минимальных горизонтальных напряжений, то ДИТ не зависит от ориентации перфорации. Зародышевая трещина оказывается поперечной для обсаженной скважины и продольной для необсаженной при любой ориентации перфорации.
- Если направление перфорации зафиксировано, то среди всех горизонтальных скважин наименьшее ДИТ наблюдается для скважины, ориентированной в направлении действия минимальных горизонтальных напряжений. Этот вывод справедлив для скважин любого типа, но для обсаженной скважины возможно образование и продольной, и поперечной трещин, а для необсаженной – только продольных.

3.5.6. Использование d -критерия для предсказания разрушения скважины глубокого залегания

С целью демонстрации влияния эффекта размера на зарождение трещины для случая скважины глубокого залегания была сделана попытка использовать d -критерий вместо критерия МРН. Из-за отсутствия экспериментальных данных, позволяющих определить необходимый для использования этого критерия параметр d , значение последнего было взято равным

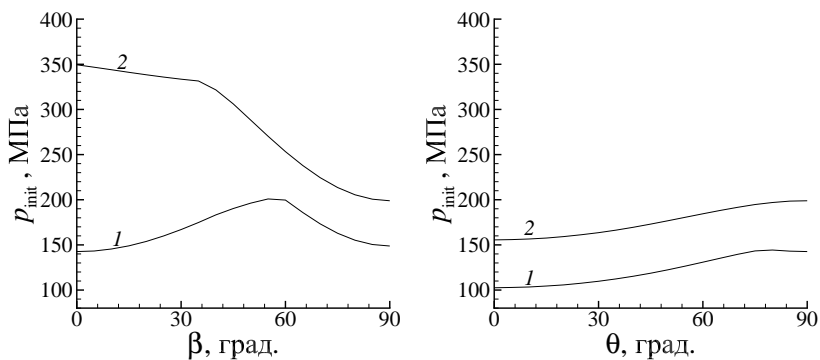


Рис. 3.56. Зависимость ДИТ от угла перфорации β для горизонтальной скважины ($\phi = 0^\circ$, $\theta = 90^\circ$), ориентированной в направлении σ_h (слева), и от угла наклона скважины θ при $\phi = 0^\circ$ (справа): 1 – критерий МРН, 2 – d -критерий.

$d = 13$ мм на основе экспериментов, описанных в § 3.3.1. Обнаружено, что при таком значении параметра d этот критерий дает сильно завышенное ДИТ, как показано на рис. 3.55. Поэтому из-за отсутствия необходимых экспериментальных данных для калибровки критерия, его вычислительной сложности и высокой погрешности результатов вместо d -критерия в настоящем параграфе использовался менее точный с физической точки зрения критерий МРН.

Глава 4

Критерии распространения трещин

Существует несколько критериев для предсказания величины приращения трещины в каждой точке фронта. Среди них наиболее популярны критерий Ирвина, критерий скорости высвобождения упругой энергии и критерий описания усталостного разрушения, основанный на формуле Пэриса–Эрдогана. Трехмерная модель распространения трещины включает в себя упомянутые критерии и может применяться для описания как хрупкого, так и усталостного разрушения.

4.1. Критерий скорости высвобождения упругой энергии

Критерий скорости высвобождения упругой энергии для случая смешанного нагружения, в котором присутствуют все три моды КИН, формулируется следующим образом [7, 192–194]. Трещина распространяется в направлении θ^* тогда, когда интенсивность освобождающейся энергии при распространении в этом направлении достигает критической для рассматриваемого материала величины (G -критерий):

$$G(\theta^*, t + \Delta t) = G_c, \quad (4.1)$$

где

$$G(\theta^*, t + \Delta t) = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2(\theta^*, t + \Delta t) + K_{II}^2(\theta^*, t + \Delta t)) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2(\theta^*, t + \Delta t),$$

а критическое значение энергии разрушения выражается через трещиностойкость материала K_{Ic} как

$$G_c = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{Ic}^2.$$

Здесь t — момент времени до распространения трещины (и изменения ее траектории), Δt — интервал времени, за который фронт трещины проходит от текущего положения к следующему, θ^* — угол поворота трещины.

Для определения направления распространения трещины, задаваемого углом θ^* , будем использовать критерий максимальных тангенциальных напряжений (МТН), предложенный в [16]. В явной формулировке в случае плоской двумерной трещины этот критерий дает направление распространения трещины θ^* :

$$\theta^* = 2 \arctan \left(\frac{K_I(t) - \sqrt{K_I^2(t) + 8K_{II}^2(t)}}{4K_{II}(t)} \right). \quad (4.2)$$

Неявная формулировка эквивалентного критерию МТН условия для определения угла θ^* , которое используется в трехмерной модели распространения трещины, выглядит как

$$K_{II}(\theta^*, t + \Delta t) = 0. \quad (4.3)$$

Учитывая формулу (4.3), критерий скорости высвобождения упругой энергии (4.1) трансформируется в условие

$$K_I^2(\theta^*, t + \Delta t) + \frac{1}{1 - \nu} K_{III}^2(\theta^*, t + \Delta t) = K_{Ic}^2. \quad (4.4)$$

Влияние третьей моды III в (4.4) на траекторию трещины уменьшается на каждом шаге распространения трещины, так как трещина стремится к предпочтительной плоскости трещины. На рис. 4.1 показаны траектории трещины, на рис. 4.2 — зависимости давления от шага распространения, на рис. 4.3, 4.4 —

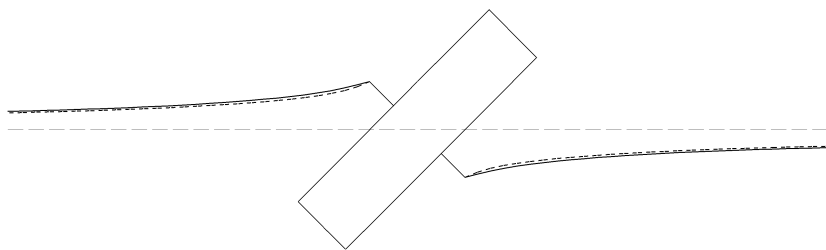


Рис. 4.1. Наклонная на $\alpha = 45^\circ$ круговая трещина и цилиндрическая скважина (сечение проходит через центр области): сплошная линия – K_I -критерий; пунктир – G -критерий.

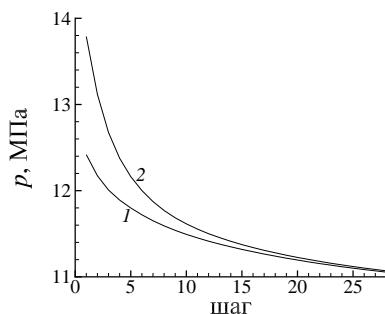


Рис. 4.2. Зависимости давления от шага распространения: 1 – K_I -критерий; 2 – G -критерий.

распределения КИН вдоль фронта трещины, рассчитанные на основе G -критерия (4.1) и K_I -критерия

$$K_I(\theta^*, t + \Delta t) = K_{Ic}. \quad (4.5)$$

Таким образом, если для определения угла отклонения трещины используется условие (4.3), то неявные критерии (4.1) и (4.5) дают близкие результаты. Если же критерии (4.1) и (4.5) используются в явной формулировке с использованием значений в момент перед распространением трещины $K_{I,II,III}(t)$ вместо неявных $K_{I,II,III}(\theta^*, t + \Delta t)$ (рассчитанных после того, как фронт трещины продвинулся на один шаг), то результаты будут различными. Это хорошо видно в задачах, описанных в работах [195–198].

Рассмотрим, для иллюстрации, задачу о сдвиговой трещине в материале, находящемся под действием сжимающих напряжений. НДС материала в окрестности кончика трещины в мо-

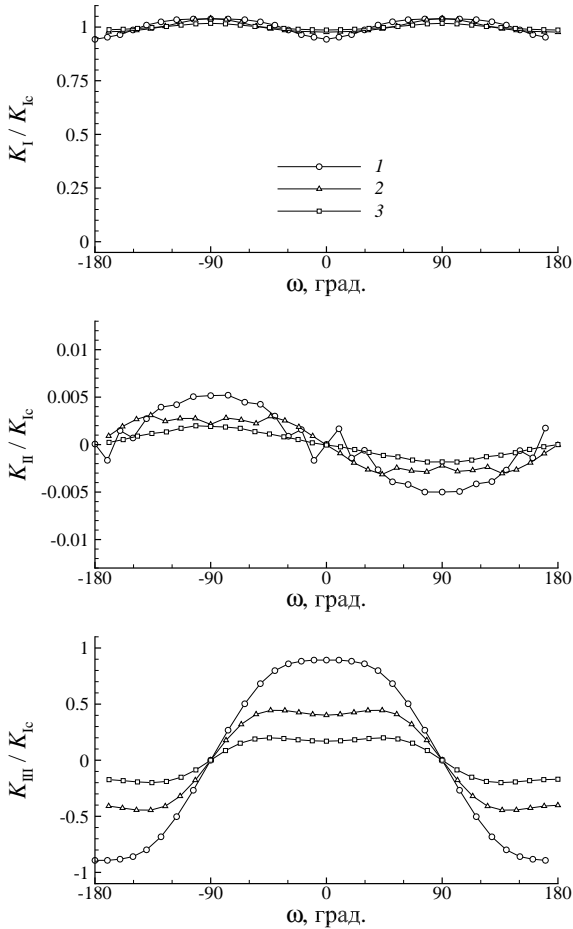


Рис. 4.3. Распределения КИН вдоль фронта трещины на различных шагах ее распространения при использовании K_I -критерия: 1 — шаг 2, 2 — шаг 10, 3 — шаг 28.

мент t до начала ее распространения характеризуется нулевым значением КИН K_I и ненулевым значением K_{II} :

$$K_I(t) = 0, \quad K_{II}(t) \neq 0. \quad (4.6)$$

Таким образом, явный критерий (4.5) в отличие от (4.1) не удовлетворяется. Но при рассмотрении обоих критериев в момент времени $t + \Delta t$ после продвижения трещины на один шаг, из

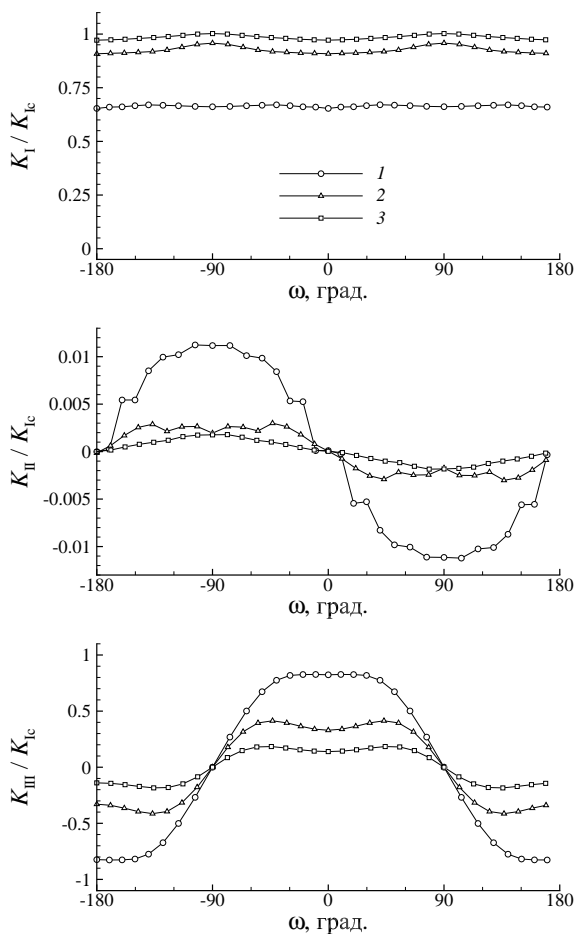


Рис. 4.4. Распределения КИН вдоль фронта трещины на различных шагах ее распространения при использовании G -критерия: 1 — шаг 2, 2 — шаг 10, 3 — шаг 28.

принципа локальной симметрии [199], описанного также в [196], следует выполнение следующего соотношения:

$$K_I(t + \Delta t) > 0, \quad K_{II}(t + \Delta t) = 0. \quad (4.7)$$

В этом случае неявные критерии (4.1) и (4.5) эквивалентны. Кроме того, следует отметить, что в рассматриваемых в работах [195–198] мода III отсутствует.

Заметим что, согласно работе [200], критерии Эрдогана–Си [16], Ньюмера [192], Ричарда [200] и Шольмана [201] должны применяться с осторожностью при решении задач, подобных задаче о сдвиговой трещине, в которых НДС характеризуются единственной ненулевой модой II или III. Это означает, что критерий (4.5) может быть неприменим для задач, описываемых в работах [195–197]. Однако в задачах о распространении трещин, нагруженных давлением, которые представляют основной интерес для авторов настоящей монографии, ширина трещины в окрестности кончика всегда положительна, таким образом, мода I КИН всегда положительна, значит, описанные критерии несомненно применимы.

4.2. Модифицированный критерий усталостного разрушения на основе формулы Пэриса–Эрдогана

Модель Пэриса–Эрдогана используется как альтернатива методу расчета приращения фронта на основе K_I - или G -критериев. Эта модель предназначена для описания усталостного разрушения и формулируется как

$$\frac{dL}{dN} = C(\Delta K_{\text{eq}})^m, \quad (4.8)$$

где dL/dN — отношение величины приращения трещины к количеству циклов нагружения; C и m параметры материала;

$$\Delta K_{\text{eq}} = K_{\text{eq}}^{\text{max}} - K_{\text{eq}}^{\text{min}} = K_{\text{eq}}^{\text{max}}(1 - R), \quad (4.9)$$

в котором K_{eq} — эффективный КИН, который задается как [200]

$$K_{\text{eq}} = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 4(\alpha_1 K_{II})^2 + 4(\alpha_2 K_{III})^2} \quad (4.10)$$

при $\alpha_1 = 1.155$ и $\alpha_2 = 1$. Таким образом в рамках линейной теории упругости R в (4.9) может быть записан как

$$R = \frac{K_{\text{eq}}^{\text{min}}}{K_{\text{eq}}^{\text{max}}} = \frac{\sigma_{\text{min}}}{\sigma_{\text{max}}}, \quad (4.11)$$

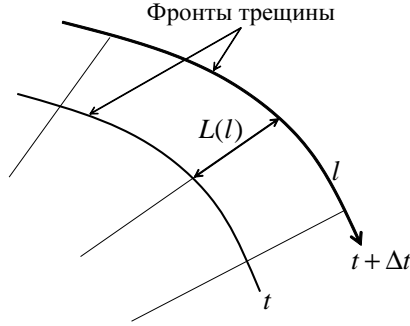


Рис. 4.5. Приращение фронта трещины $L(l)$ за время от t до $t + \Delta t$.

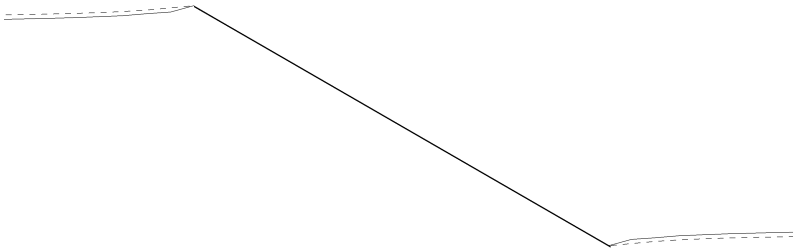


Рис. 4.6. Траектории распространения наклоненных на угол $\alpha = 45^\circ$ круговых трещин (сечение проходит через центр области), рассчитанные по $K_I = K_{Ic}$, $K_{II} = 0$ (штриховая линия) и (4.15), (4.2) (сплошная).

где σ_{\min} равно нулю, а σ_{\max} постоянна в [7, 9, 14, 130]. Формула для величины приращения фронта трещины $L(l)$ за время от t до $t + \Delta t$ в каждой точке фронта l (рис. 4.5) выводится из закона (4.8). Максимальное приращение вдоль фронта L^{\max} является параметром модели и реализуется в точке фронта с максимальным значением $\Delta K_{\text{eq}}^{\max}$. Из (4.8) следует

$$L \approx C(\Delta K_{\text{eq}})^m N \quad (4.12)$$

и

$$L^{\max} \approx C(\Delta K_{\text{eq}}^{\max})^m N. \quad (4.13)$$

Из (4.12) и (4.13) следует следующее соотношение:

$$\frac{L}{L^{\max}} = \left(\frac{\Delta K_{\text{eq}}}{\Delta K_{\text{eq}}^{\max}} \right)^m. \quad (4.14)$$

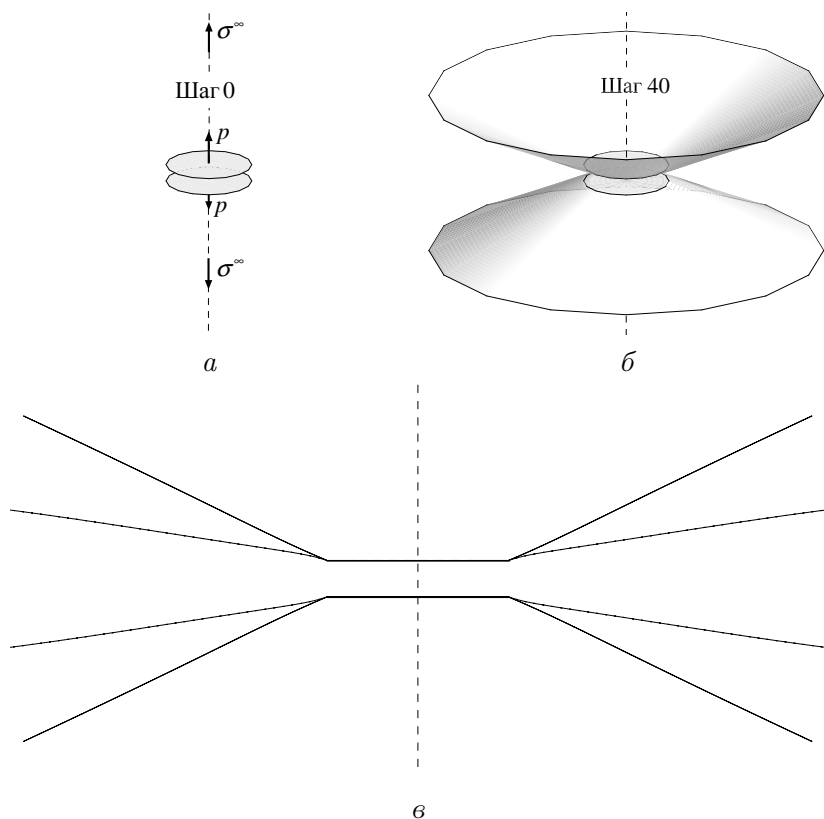


Рис. 4.7. Распространение трещин от двух параллельных круговых зародышевых трещин: *a* — зародышевые трещины на шаге 0; *б* — изометрия трещины, нагруженной давлением $p = 1$ МПа в свободном от напряжений материале $\sigma^\infty = 0$ на 40-м шаге распространения; *в* — траектории трещины, нагруженной давлением $p = 1$ МПа в свободном от напряжений материале $\sigma^\infty = 0$ (сплошная), и ненагруженной трещины ($p = 0$) в растягиваемом материале $\sigma^\infty = 1$ МПа (штриховая линия).

Таким образом, величина приращения в каждой точке фронта l задается как

$$L(l) = L^{\max} \left(\frac{\Delta K_{\text{eq}}}{\Delta K_{\text{eq}}^{\max}} \right)^m \quad (4.15)$$

или, с учетом (4.9) и (4.11) приближенно выражается

$$L(l) = L^{\max} \left(\frac{K_{\text{eq}}}{K_{\text{eq}}^{\max}} \right)^m. \quad (4.16)$$

Формула (4.16) называется масштабирующим законом для приращения фронта трещины. Сделаем еще одно упрощение в (4.16), заменив K_{eq} величиной K_I .

На рис. 4.6 приведено сравнение траекторий распространения круговой ненагруженной трещины в растягиваемом бесконечном материале, полученных по K_I -критерию с условием (4.3) и масштабирующий закон (4.16) с условием (4.2).

Масштабирующий закон (4.16) для величины приращения фронта трещины также использовался для описания распространения трещин от двух параллельных круговых зародышевых трещин (рис. 4.7). Радиусы зародышевых трещин равны 1 м, расстояние между ними – 0.4 м, параметры в (4.16) были выбраны равными $m=2.1$, $L^{\text{max}}=0.1$ м. Задача усталостного распространения трещин была решена в двух постановках: ненагруженные трещины ($p = 0$) распространяются в материале, находящемся под действием растягивающих напряжений $\sigma^\infty = 1$ МПа; трещины, нагруженные давлением $p = 1$ МПа, помещены в свободный от внешних напряжений материал $\sigma^\infty = 0$. Для определения направления распространения был использован критерий (4.3). Величина приращения рассчитывалась по масштабирующему закону (4.16).

4.3. Критерии поворота фронта трещины в трехмерном случае

4.3.1. Формулировка критерия распространения трещины в трехмерном случае

Во многих работах, посвященных моделированию распространения трехмерных трещин в пространстве [8, 11, 12, 14, 15, 126], направление распространения фронта трещины описывается исключительно углом отклонения θ без учета моды КИН III (рис. 4.8, а). В таких работах используется критерий МГН (4.2) для расчета угла поворота трещины θ при описании распространения трещин под действием смешанного нагружения. Угол поворота трещины θ рассчитывается либо по формуле (4.2), либо неявно на основе условия (4.3). Плоский критерий (4.1) (или (4.5)) и (4.2) (или (4.3)) используется в монографии

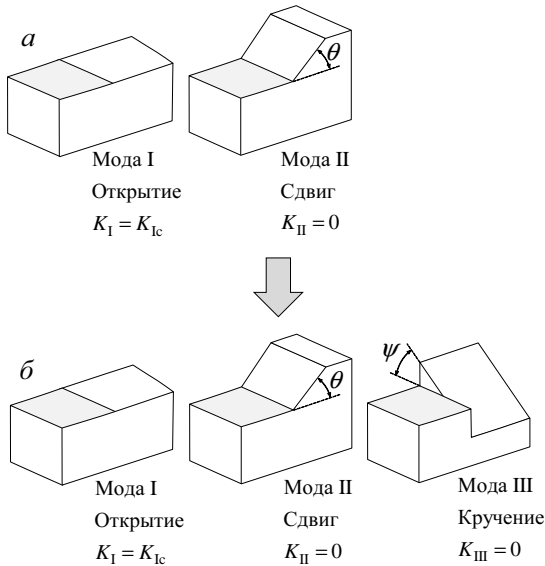


Рис. 4.8. Критерий распространения трещины и отклонение фронта: *a* — плоское смешанное нагружение; *б* — трехмерное смешанное нагружение.

в качестве первого приближения для определения приращения фронта трещины и его направления. Однако для реалистичного предсказания траектории трещины в случае произвольной смешанной нагрузки необходимо использовать трехмерные критерии, учитывающие все три моды КИН I, II и III [200, 202] (рис. 4.8, *б*). Углы поворота θ и кручения ψ определяют направление распространения трещины в каждой точке фронта $l \in \Gamma$. Рассмотрим критерий распространения трещины для определения углов поворота и кручения в случае смешанного нагружения трещины, описанный в [18]. Для определения этих углов используются условия

$$K_{II}(\theta(l)) = 0, \quad K_{III}(\psi(l)) = 0. \quad (4.17)$$

Углы θ и ψ связаны между собой, как показано на рис. 4.9. Напишем формулу, определяющую эту связь:

$$\tan \psi = \frac{L(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin \theta)}{\Delta l}. \quad (4.18)$$

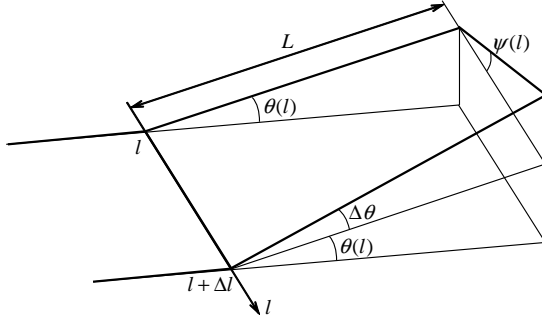


Рис. 4.9. Угол поворота θ и угол кручения ψ определяют направление распространения фронта трещины.

В предположении о малости значений ψ , θ , $\Delta\theta$ и Δl в (4.18) получается зависимость угла кручения от производной угла поворота по координате l вдоль фронта

$$\psi(l) = \frac{L(l)\Delta\theta}{\Delta l} = L(l)\frac{\partial\theta}{\partial l}(\theta(l)). \quad (4.19)$$

Таким образом, третья мода КИН может быть записана как функция угла поворота

$$K_{\text{III}}(\psi(l)) = \bar{K}_{\text{III}}(\theta(l)), \quad (4.20)$$

что позволяет переписать условие (4.17) только для угла поворота θ

$$K_{\text{II}}(\theta(l)) = 0, \quad \bar{K}_{\text{III}}(\theta(l)) = 0. \quad (4.21)$$

4.3.2. Неявный алгоритм выполнения критериев распространения

Так как \bar{K}_{III} зависит от производной от угла поворота трещины по координате l (4.19), то выполнить второе условие в (4.21) в каждой точке фронта Γ невозможно. Поэтому мы объединили моды КИН K_{II} и K_{III} с весовым коэффициентом β в один функционал и определили этот функционал через интеграл по всей длине фронта на новом шаге распространения трещины $t + \Delta t$:

$$F(t + \Delta t, \theta(l)) = \int_{\Gamma} (1 - \beta) K_{\text{II}}^2(t + \Delta t, \theta(l)) + \beta \bar{K}_{\text{III}}^2(t + \Delta t, \theta(l)) dl. \quad (4.22)$$

Угол поворота трещины в критерии распространения при смешанном трехмерном нагружении определим как угол $\theta^*(l)$, при котором функционал F принимает минимальное значение:

$$F(t + \Delta t, \theta^*(l)) = \min_{\theta(l)} F(t + \Delta t, \theta(l)). \quad (4.23)$$

Оптимизационная задача минимизации функционала (4.23) решается итерационно:

$$F^{s+1} = \sum_{j \in \Gamma_N} (1 - \beta) \left(K_{\text{II}j}^s + \frac{1}{\varkappa_{\text{II}}} \Delta^s \theta_j \right)^2 + \beta \left(\bar{K}_{\text{III}j}^s + \frac{L_j}{\varkappa_{\text{III}}} \frac{\Delta^s \theta_{j+1} - \Delta^s \theta_j}{l_{j+1} - l_j} \right)^2, \quad (4.24)$$

где $\Delta^s \theta_j = \theta_j^{s+1} - \theta_j^s$ и s — номер итерации, Γ_N — множество индексов точек, принадлежащих фронту.

На каждой итерации $s + 1$ углы θ_j^{s+1} рассчитываются как точки минимума функционала (4.24) путем решения СЛАУ:

$$\frac{\partial F^{s+1}}{\partial \theta_j^{s+1}} = 0, \quad j \in \Gamma_N. \quad (4.25)$$

Параметр β позволяет рассматривать различные критерии распространения. При $\beta = 0$ получается критерий МТН. Отметим, что в настоящее время отсутствует общее мнение по поводу критерия, наиболее адекватно предсказывающего направление распространения трещины при сложном трехмерном нагружении [200], поэтому в монографии постановка задачи (4.22), (4.23) используется в общей форме. При этом параметр β для решения практических задач должен выбираться на основе экспериментальной информации.

4.3.3. Применение неявного алгоритма для демонстрации влияния третьей моды КИН

Для демонстрации влияния моды КИН K_{III} на фронт трещины было проведено моделирование распространения наклонной круговой трещины. Угол наклона зародышевой трещины равен $\alpha = 50^\circ$. На бесконечности заданы напряжения, равные $\sigma_x^\infty = -16$ МПа, $\sigma_y^\infty = -10$ МПа, $\sigma_z^\infty = -16$ МПа. Трещина, полученная на основе описанного критерия для $\beta = 0.5$, показана на рис. 4.10. Траектории трещин для различных весовых коэффициентов β в плоскости, проходящей через центр области, показаны на рис. 4.11.

Распределения трех мод КИН вдоль фронта трещины на различных шагах ее распространения, полученные при $\beta = 0.5$, показаны на рис. 4.12. Как видно на рисунке, нулевое условие для мод КИН II и III не выполняется, поскольку фронт трещи-

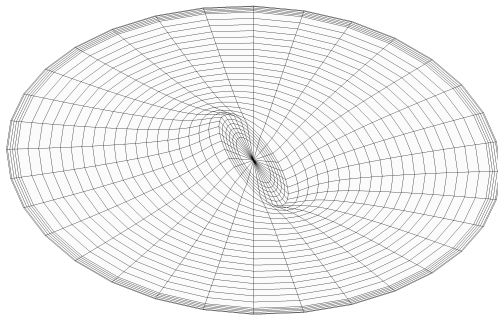


Рис. 4.10. Форма трещины для среднего значения весового коэффициента $\beta = 0.5$.

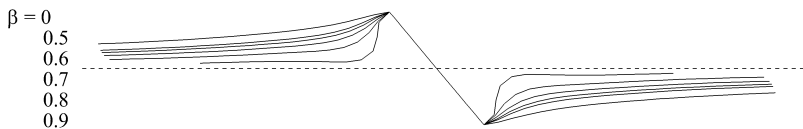


Рис. 4.11. Траектории наклонных ($\alpha = 50^\circ$) круговых трещин, полученные при различных значениях весового коэффициента β .

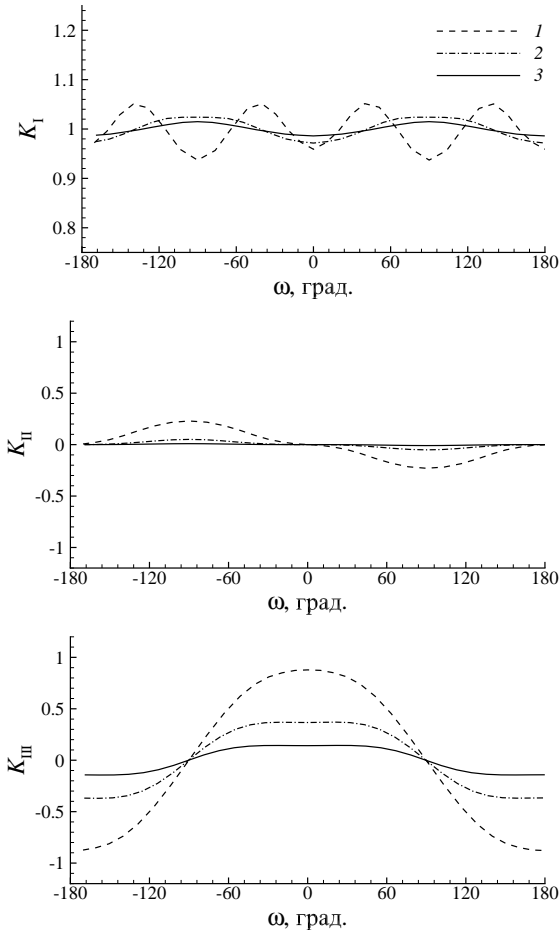


Рис. 4.12. Распределения КИН вдоль фронта трещины, полученные при $\beta = 0.5$: шаг 2 (1); шаг 10 (2); шаг 30 (3).

ны не может повернуться достаточно быстро для того, чтобы сдвиговые напряжения и смещения в окрестности фронта трещины стали нулевыми. При дальнейшем росте фронт трещины приближается к плоской кривой (см. рис. 4.10) и значения K_{II} , K_{III} уменьшаются (см. рис. 4.12).

Распределения КИН вдоль фронта трещины, полученные на 30-м шаге распространения, показаны на рис. 4.13 для различных значений параметра β . Видно, что плоский критерий распространения ($\beta = 0$) приводит к ненулевой моде КИН III, несмотря на то что значение этой моды должно быть нулевым

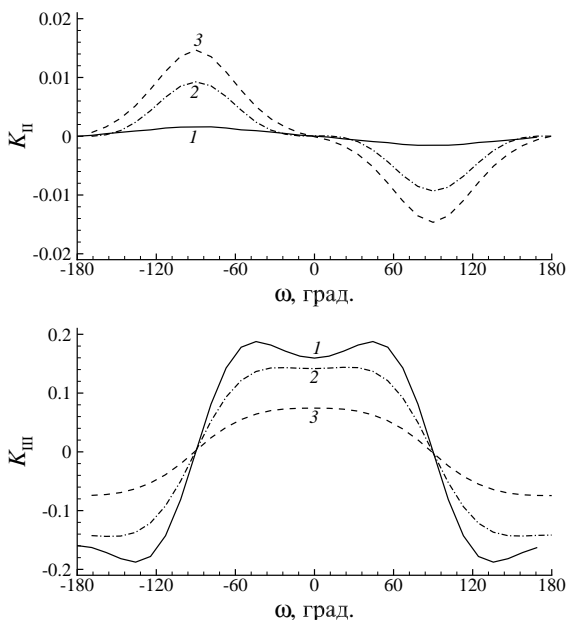


Рис. 4.13. Распределения КИН вдоль фронта трещины, полученные на 30-м шаге распространения при: $\beta = 0$ (1); $\beta = 0.5$ (2); $\beta = 0.8$ (3).

на фронте плоской трещины. Если же значение третьей моды КИН III учитывается в критерии распространения ($\beta \geq 0.5$), то значения КИН III уменьшаются из-за меньшего отклонения фронта трещины от плоскости.

В рамках описанной постановки невозможно получить перьеобразную форму фронта и зигзагообразное распределение мод K_{III} вдоль фронта трещины. Как и указано в [202], [203], получается гладкое распределение K_{III} вдоль фронта. Тем не менее включенный в трехмерную модель распространения критерий включает в себя механизм учета смешанного трехмерного нагружения.

4.4. Задача о распространении трещины при квазистатическом нагружении

Применимость описанных выше критериев распространения трещин будет продемонстрирована на задачах о статическом нагружении трещин. Рассматриваются два типа трещин: трещина в упругом материале, подверженном растягивающим на-

пряжениям, и нагруженная давлением трещина в материале, сжатом внешними напряжениями.

4.4.1. Трещина в упругом материале, подверженном растягивающим напряжениям

Постановка задачи о наклонной круговой трещине, помещенной в материал, находящийся под действием растягивающих напряжений, приведена в § 2.4. В отличие от § 2.4, где задача используется для верификации метода расчета КИН, в настоящем параграфе будет рассматриваться процесс распространения трещины. Для случая $\alpha = 0$ легко получить аналитическое выражение хрупкого квазистатического распространения. Так как НДС в окрестности фронта трещины для $\alpha = 0$ характеризуется только первой модой КИН, то критерии совпадают. При распространении трещина вне зависимости от выбора критерия остается плоской. Если величина растягивающих напряжений σ_y^∞ не превосходит критического значения, определяемого условием

$$K_I < K_{Ic}, \quad (4.26)$$

то распространение трещины отсутствует. При этом ширина трещины увеличивается $W(\sigma_y^\infty, r)$ (2.131) и ее объем равен

$$V = \frac{16\sigma_y^\infty R^3}{3E'}. \quad (4.27)$$

Пока условие (4.26) выполняется, увеличение σ_y^∞ в (4.27) ведет к увеличению объема трещины V при постоянном радиусе трещины R . При дальнейшем увеличении σ_y^∞ выполняется условие

$$K_I > K_{Ic}. \quad (4.28)$$

Тогда

$$K_I \equiv 2\sigma_y^\infty \sqrt{\frac{R}{\pi}} = K_{Ic} \quad (4.29)$$

дает новое положение фронта трещины

$$R = \frac{\pi K_{Ic}^2}{4(\sigma_y^\infty)^2} \quad (4.30)$$

и объем трещины

$$V = \frac{\pi^3 K_{Ic}^6}{12E'(\sigma_y^\infty)^5}. \quad (4.31)$$

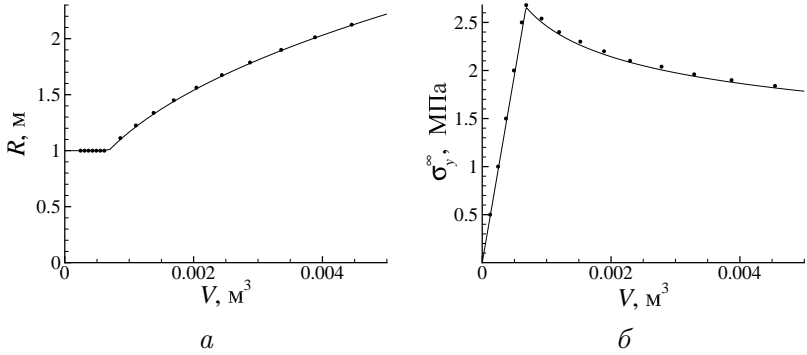


Рис. 4.14. Зависимость радиуса трещины R (а) и напряжения σ_y^∞ (б) от объема трещины V : аналитическое решение (сплошная линия); численное (точки).

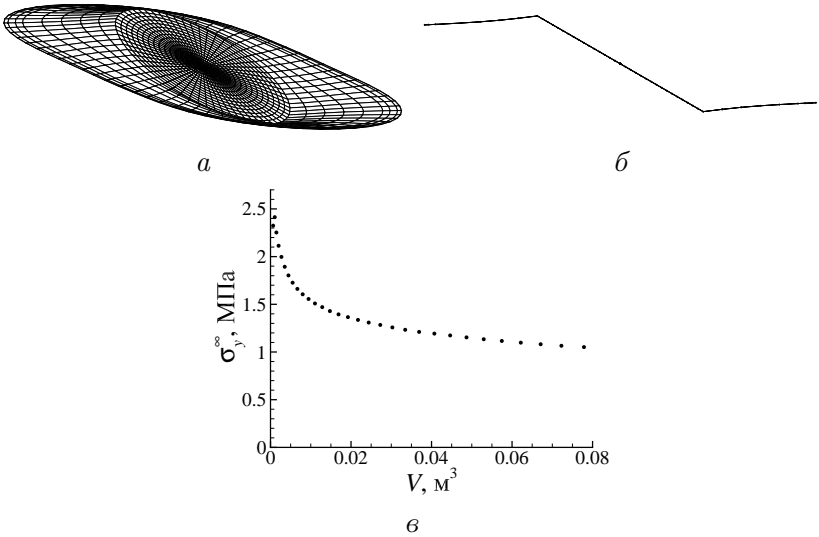


Рис. 4.15. Квазистатическое распространение трещины от наклоненной на $\alpha = 30^\circ$ начальной трещины при растягивающих напряжениях σ_y^∞ : а — форма трещины на 6-м шаге распространения; б — траектория трещины в сечении $z = 0$; в — изменение σ_y^∞ и V в процессе роста трещины.

Рассмотрим зародышевую трещину, описанную в § 2.4, с $R = 1$ м в упругом материале с $E = 20$ ГПа, $\nu = 0.2$, $K_{Ic} = 3$ МПа $\sqrt{\text{м}}$. Растягивающие напряжения в начальный момент равны $\sigma_y^\infty = 1$ МПа, а затем монотонно увеличиваются. После начала распространения трещины растягивающие напряжения

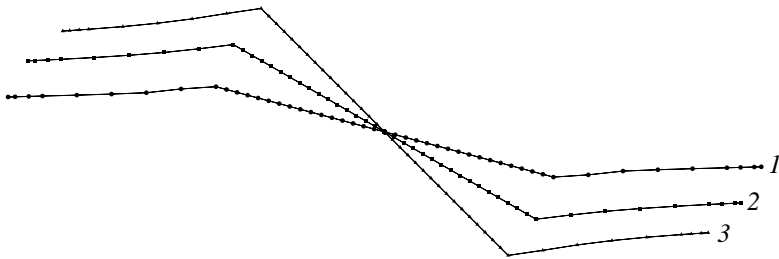


Рис. 4.16. Траектории трещины при различных углах наклона:
 $\alpha = 15^\circ$ (1), $\alpha = 30^\circ$ (2), $\alpha = 45^\circ$ (3).

σ_y^∞ подбираются по радиусу трещины R так, чтобы удовлетворять условию (4.30). На рис. 4.14 приведено сравнение численного и аналитического решений задачи о распространении нагруженной трещины в ненагруженном материале для случая $\alpha = 0$.

Полученное численно распространение трещины в случае ненулевого угла наклона начальной трещины α показано на рис. 4.15. Траектории трещины при различных углах наклона — на рис. 4.16.

4.4.2. Нагруженная давлением трещина в материале, сжатом внешними напряжениями

В этом параграфе рассматривается постановка задачи (рис. 4.17) о распространении трещин, более подходящая, чем описанная в § 4.4.1, для верификации критериев распространения, предназначенных для использования в моделях ГРП. Плоскорadiaльная трещина радиуса R повернута вокруг оси Oz на угол α . Это может быть как изолированная трещина, так и зародышевая, ортогональная скважине радиуса R_w . Материал вокруг трещины сжат напряжениями на бесконечности σ_x^∞ , σ_y^∞ , σ_z^∞ (напомним, что сжимающим напряжениям соответствуют отрицательные значения напряжений). Скважина и трещина нагружены изнутри давлением p . Квазистатическое распространение трещины обеспечивается подбором этого давления p на каждом шаге распространения (рис. 4.17). Алгоритм численного решения задачи о квазистатическом распространении трещины описан в главе 6.

Моделирование проведено при следующих значениях параметров: $E = 20$ ГПа, $\nu = 0.2$, $K_{Ic} = 3$ МПа $\sqrt{м}$, $R = 1$ м,

$R_w = 0.5 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$, $\sigma_x^\infty = -16 \text{ МПа}$, $\sigma_z^\infty = -16 \text{ МПа}$. Для демонстрации влияния внешних напряжений на форму трещи-

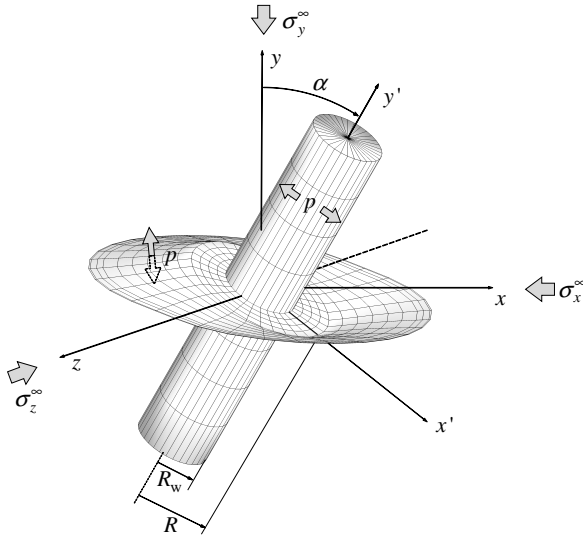


Рис. 4.17. Полость и трещина, нагруженные давлением p в материале, нагруженном на бесконечности напряжениями с тензором σ^∞ .

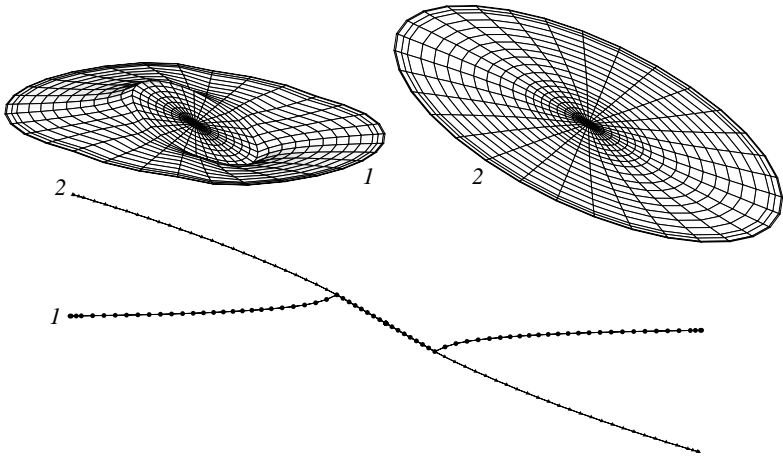


Рис. 4.18. Изометрические проекции трещины, полученные при квазистатическом распространении: 1 — $\sigma_y^\infty = 8 \text{ МПа}$ (слева); 2 — $\sigma_y^\infty = 15.9 \text{ МПа}$ (справа); траектории трещины в сечении $z = 0$ (снизу).

ны было рассмотрено два значения напряжения σ_y^∞ : -8 МПа и -15.9 МПа. Изометрические проекции трещины, полученные при квазистатическом распространении, показаны на рис. 4.18. На этом же рисунке приведены траектории трещин в сечении $z = 0$. Очевидно, что внешние напряжения оказывают определяющее влияние на траекторию трещины, а используемые критерии распространения позволяют его учитывать.

Глава 5

Модели для описания движения жидкости в трещине

В настоящей главе для описания движения жидкости в трещине используются модель ньютоновской несжимаемой жидкости, модель Гершеля–Балкли (*Herschel–Bulkley*, НВ) неньютоновской жидкости и модель слабосжимаемой жидкости.

5.1. Общая модель сжимаемой неньютоновской жидкости Гершеля–Балкли

5.1.1. Уравнения движения жидкости в пространстве

Рассмотрим наиболее общую форму уравнений движения сжимаемой неньютоновской жидкости в приближении Гершеля–Балкли в трехмерном пространстве. Модель включает в себя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0 \quad (5.1)$$

и уравнение импульса

$$\rho \frac{D \mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbb{P}. \quad (5.2)$$

В (5.1), (5.2) $\mathbf{u} = \{u_i\}$ — вектор скорости, ρ — плотность жидкости и $\mathbb{P} = \{p_{ij}\}$ тензор напряжений, который разделяется на две части

$$\mathbb{P} = -p\mathbb{E} + \mathbb{T}, \quad (5.3)$$

где p — скалярная величина, называемая гидродинамическим давлением, $\mathbb{T} = \{\tau_{ij}\}$ — тензор вязких напряжений и $\mathbb{E} = \text{diag}(1, 1, 1)$ — единичный тензор. Тензор вязких напряжений \mathbb{T} выражается через тензор скоростей деформаций $\mathbb{D} = \{D_{ij}\}$ как

$$\mathbb{T} = \eta\mathbb{D}, \quad \text{for } T \geq \tau_0, \quad (5.4)$$

$$\mathbb{D} = 0, \quad \text{for } T < \tau_0. \quad (5.5)$$

В (5.4),(5.5) компоненты тензора \mathbb{D} равны

$$D_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (5.6)$$

где η — вязкость жидкости, задаваемая в модели Гершеля–Балкли как

$$\eta(D) = KD^{n-1} + \frac{\tau_0}{D}. \quad (5.7)$$

Здесь K — показатель консистенции жидкости; n — показатель степени, который отражает степень сдвиговых напряжений, τ_0 — критическое сдвиговое напряжение. T и D обозначают вторые инварианты соответствующих тензоров и задаются следующими формулами:

$$T = \sqrt{\frac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij}}, \quad D = \sqrt{\frac{1}{2}D_{ij}D_{ij}}. \quad (5.8)$$

В координатной записи уравнения (5.1) и (5.2) выглядят как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (5.9)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta(D) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (5.10)$$

5.1.2. Двумерные уравнения движения неньютоновской жидкости в трехмерной трещине

Считаем, что ширина (открытие) трещины W намного меньше ее продольных размеров и течение локально эквивалентно течению между двумя параллельными пластинами. Тогда производные от компонент скорости по продольным направлениям вдоль трещины $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2$ малы по сравнению с производными по поперечному направлению $\partial/\partial x_3$. Компонента скорости в поперечном направлении мала ($u_3 \approx 0$), по сравнению с продольными компонентами скорости. Давление и показатель консистенции в поперечном направлении не изменяются. Производными по t в (5.10) пренебрегаем. Нестационарность модели распространения будет обуславливаться уравнением неразрывности (5.29) через соотношение между открытием трещины W и поперечной скоростью u_3

$$\frac{\partial W}{\partial t} = u_3. \quad (5.11)$$

С учетом сделанных допущений уравнения (5.29), (5.10) могут быть упрощены. Отбрасывая малые члены из (5.10) для $i = 1, 2$ получим

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\eta(D) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right], \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\eta(D) \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right]. \quad (5.12)$$

Уравнение (5.10) для $i = 3$ с учетом принятых допущений выродается. Проинтегрируем по x_3 уравнения (5.12):

$$\eta(D) \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + A_i, \quad (5.13)$$

где A_i — некоторые константы.

Далее проведем рассуждения отдельно для ньютоновской и НВ-жидкостей. В ньютоновской жидкости $\eta(D) = \mu = \text{const}$, $\tau_0 = 0$ и из (5.13) следует

$$u_i = \frac{x_3^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i} + A_i \frac{x_3}{2\mu} + B_i. \quad (5.14)$$

С учетом условий при $x_3 = 0$ и $x_3 = W$

$$u_i = 0, i = 1, 2, \quad (5.15)$$

находим

$$u_i = -x_3 \frac{W - x_3}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (5.16)$$

Из выражений для потоков

$$q_i = \int_0^W u_i dx_3, \quad i = 1, 2, \quad (5.17)$$

и из (5.16) получаем уравнения, связывающие производные от давления с потоками

$$q_i = -\frac{W^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (5.18)$$

В НВ-жидкости кажущаяся вязкость $\eta(D)$ зависит от компонент скорости, зависящих от x_3 . Для интегрирования уравнений (5.13) перейдем в систему координат, x_1 в которой совпадает с вектором скорости \mathbf{u} . В ней

$$\eta(D) = K \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^{n-1} + \tau_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^{-1}. \quad (5.19)$$

Интегрируя (5.13) с учетом граничных условий (5.15) и выражения для вязкости (5.19), получим

$$u_1 = -\frac{nK^{-1/n}}{(n+1)} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^{1/n} \left((0.5W - z_\tau)^{1+1/n} - u_d(x_3)^{1+1/n} \right), \quad (5.20)$$

где

$$u_d(x_3) = \begin{cases} 0.5W - x_3 - z_\tau, & x_3 < 0.5W - z_\tau, \\ 0, & 0.5W - z_\tau \leq x_3 \leq 0.5W + z_\tau, \\ x_3 - 0.5W - z_\tau, & x_3 > 0.5W + z_\tau, \end{cases}$$

$$z_\tau = \tau_0 \left| \frac{\partial p}{\partial x_1} \right|^{-1}. \quad (5.21)$$

При выводе выражения для $u_d(x_3)$ учтена зависимость профиля скорости при течении НВ-жидкости между пластинами (рис. 5.1). Аналогичными рассуждениями получим выражение

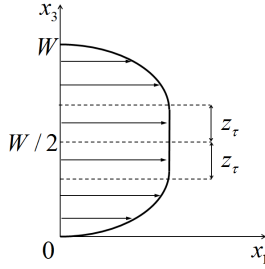


Рис. 5.1. Характерный профиль скорости при течении жидкости Гершеля–Балкли между двумя параллельными пластинами.

для u_2 . Далее для обоих случаев запишем выражения для потоков:

$$q_i = - \frac{n}{(4n+2)(2K)^{1/n}} W^{2+1/n} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^{1/n} \times \\ \times \left(1 - \frac{2z_\tau}{W} \right)^{1+1/n} \left(1 + \frac{2z_\tau}{W} \frac{n}{n+1} \right). \quad (5.22)$$

В правой части (5.22) выделим первую степень производных от давления $\partial p / \partial x_i$:

$$q_i = - \frac{W^3}{12\eta_a} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (5.23)$$

где η_a — кажущаяся вязкость, которая может быть записана как через производные от давления $\partial p / \partial x_i$ (в этом случае примем $\eta_a = \eta_p$), так и через потоки (5.17) (тогда $\eta_a = \eta_q$).

Через производные от давления кажущаяся вязкость для первого случая (5.20) записывается как

$$\eta_a = \eta_p = \frac{(2K)^{1/n}(2n+1)}{6n} \left| \frac{\partial p}{\partial x_1} \right|^{(n-1)/n} W^{(n-1)/n} + \\ + \frac{(4n+2)2^{1/n}\tau_0}{3n \left| \frac{\partial p}{\partial x_1} \right|^{1/n} W^{1/n}}. \quad (5.24)$$

При переходе в (5.24) к произвольной системе координат η_p выразится через инвариантный относительно смены системы

координат градиент давления $\eta_a = \eta_p(\nabla p)$ вместо производной $\partial p/\partial x_i$

$$\eta_a = \eta_p(\nabla p) = \frac{(2K)^{1/n}(2n+1)}{6n} (W|\nabla p|)^{(n-1)/n} + \frac{(4n+2)2^{1/n}\tau_0}{3n(W|\nabla p|)^{1/n}}, \quad (5.25)$$

где

$$|\nabla p| = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (5.26)$$

Для того чтобы получить выражение для кажущейся вязкости через потоки, просуммируем по $i = 1, 2$ квадраты выражений (5.22) и выразим $|\nabla p|$ через $|\mathbf{q}| = (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}$, который, как и $|\nabla p|$, инвариантен относительно смены системы координат:

$$\eta_q = \frac{K}{6} \left(\frac{4n+2}{n} \right)^n \left(\frac{W^2}{|\mathbf{q}|} \right)^{1-n} + \frac{2n+1}{3(n+1)} \frac{\tau_0 W^2}{|\mathbf{q}|}. \quad (5.27)$$

Формула (5.27) является двумерным обобщением модели жидкости со степенным законом на случай жидкости Гершеля–Балкли. Для жидкости со степенным законом ($\tau_0 \equiv 0$) зависимость (5.23) с кажущейся вязкостью (5.27) использовалась в [11, 204], а с вязкостью (5.25) – в [14, 94].

Несжимаемая неньютоновская жидкость

Если плотность жидкости ρ постоянна, то уравнения (5.1) и (5.9) переписываются как

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.28)$$

и

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5.29)$$

Интегрируя уравнение (5.29) по координате x_3 и учитывая соотношения (5.11) и (5.17), можно получить уравнение для ширины трещины W

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0. \quad (5.30)$$

Подстановка выражения для потоков (5.23) в уравнение неразрывности (5.30) дает следующее уравнение для давления:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{W^3}{12\eta_a} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{W^3}{12\eta_a} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (5.31)$$

которое в операторной форме записывается как

$$\nabla(a\nabla p) = f, \quad (5.32)$$

где

$$a = \frac{W^3}{12\eta_a}, \quad f = \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (5.33)$$

Отметим еще раз, что уравнения для описания движения ньютоновской жидкости являются частным случаем уравнений движения жидкости Гершеля–Балкли. Объединение уравнений (5.30) и (5.18) дает уравнение, подобное (5.31), в котором вместо кажущейся вязкости η_a используется вязкость жидкости μ .

Сжимаемая ньютоновская жидкость

Уравнение для ширины трещины в случае движения сжимаемой жидкости получается (аналогично уравнению (5.30)) интегрированием уравнения (5.9) по координате x_3 с учетом соотношений (5.11) и (5.17)

$$\frac{\partial \rho W}{\partial t} + \frac{\partial \rho q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho q_2}{\partial x_2} = 0. \quad (5.34)$$

В операторной записи оно же выглядит следующим образом

$$\frac{\partial W \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0. \quad (5.35)$$

Так как в случае сжимаемой жидкости плотность не является заданным параметром, то для замыкания системы уравнений требуется добавить дополнительное уравнение. В случае слабосжимаемой жидкости используется следующая связь между давлением и плотностью:

$$\rho(P) = \rho_0(1 + C_0 P), \quad (5.36)$$

где C_0 – коэффициент сжимаемости. Соотношение (5.36) позволяет исключить плотность из уравнения неразрывности (5.35) и переписать его в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} [W(1 + C_0P)] + \nabla \cdot [(1 + C_0P)\mathbf{q}] = 0. \quad (5.37)$$

Так же как и в случае несжимаемой жидкости, уравнения для ширины трещины (5.35) и для потоков (5.12) объединяются в уравнение для давления (5.32) с коэффициентами

$$a = \frac{(1 + C_0P)W^3}{12\mu}, \quad f = \frac{\partial W(1 + C_0P)}{\partial t}. \quad (5.38)$$

Как и в § 5.1.2, отметим, что уравнения для описания движения несжимаемой ньютоновской жидкости являются частным случаем уравнений движения слабосжимаемой жидкости при нулевом коэффициенте сжимаемости.

5.1.3. Граничные условия для уравнений движения жидкости в трещине

Трещина в трехмерном пространстве представляется двумерной поверхностью S_n , как показано на рис. 5.2. Через входную границу Γ^q жидкость закачивается в трещину из скважины. Единичная нормаль \mathbf{n}_q к Γ^q лежит в плоскости трещины и направлена от скважины внутрь трещины. Границей $\Gamma^p(t)$ является фронт жидкости, который, отметим, не совпадает с фронтом трещины $\Gamma^r(t)$. На этих границах ставятся граничные условия для уравнения (5.31):

на фронте жидкости Γ^p

$$p|_{\Gamma^p} = p_{\text{pore}} \quad (5.39)$$

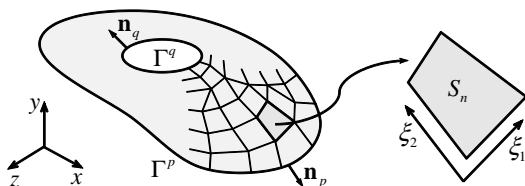


Рис. 5.2. Криволинейная поверхность трещины в трехмерном пространстве и ее аппроксимация плоскими элементами.

и на входной границе

$$\mathbf{q}|_{x_q} = q_{in} \cdot \mathbf{n}_q, \quad (5.40)$$

где p_{pore} – давление поровой жидкости в породе, $q_{in} = Q_{in}/L_q$ – удельный расход жидкости, рассчитываемый по заданному суммарному расходу Q_{in} и длине L_q входной границы Γ^q .

Условие (5.40) переписывается в терминах давления с учетом уравнения (5.23) как

$$\int_{\Gamma^q} \frac{W^3}{12\eta_a} \frac{\partial p}{\partial n} ds = -Q_{in}. \quad (5.41)$$

Распределение давления p , полученное из решения уравнения (5.32) с граничными условиями (5.39), (5.41), используется в качестве граничного условия при решении уравнений упругого равновесия (см. главу 2). Кроме того, поток жидкости (5.23) на фронте жидкости используется для определения скорости фронта жидкости \mathbf{v}_f из условия Стефана

$$\mathbf{v}_f|_{\Gamma^p} = \frac{\mathbf{q}}{W}|_{\Gamma^p}. \quad (5.42)$$

При определении положения фронта жидкости $\Gamma^p(t)$ считается, что скорость фронта ему ортогональна.

5.2. Численный метод решения уравнений движения жидкости

Для простоты изложения рассмотрим сначала метод решения уравнений модели несжимаемой ньютоновской жидкости, а затем опишем, как на его основе создается метод решения уравнений более сложных моделей течения.

5.2.1. Решение уравнений движения несжимаемой ньютоновской жидкости

Для решения уравнения (5.31) используется метод конечных элементов (МКЭ). Область решения разбивается на элементы,

как показано на рис. 5.2. В каждом элементе выбираются узловые точки x_i , локальная система координат ξ_1, ξ_2 и форм-функции элемента $\phi_i(\xi_1, \xi_2)$, записанные в локальной системе координат. Все функции, такие как решение p или координаты точки x внутри элемента, представляются в форме

$$p(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^M p_i \phi_i(\xi_1, \xi_2), \quad (5.43)$$

где $\phi_i(\xi_1, \xi_2)$ — форм-функции элемента, записанные в локальной системе координат (ξ_1, ξ_2) , p_i — значение давления в i -й ($i = 1, \dots, M$) узловой точке элемента.

Уравнение (5.31) переписывается в слабой формулировке

$$\int_{S_n} \nabla(a \nabla p) \omega dS = \int_{S_n} f \omega dS, \quad (5.44)$$

где ω — тестовая функция. По теореме Грина

$$\int_{\Gamma^p \cup \Gamma^q} \frac{\partial p}{\partial n} dG - \int_{S_n} \nabla(a \nabla p) \nabla \omega dS = \int_{S_n} f \omega dS. \quad (5.45)$$

Подстановка форм-функций элемента в качестве тестовых функций в 5.45 для каждого элемента уравнений

$$K_{ij} p_i = Q_j + F_j, \quad (5.46)$$

где

$$K_{ij} = \iint_{S_n} a \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j |J| d\xi_1 d\xi_2, \quad Q_j = \int_{\partial S_n} a \frac{\partial p}{\partial n} \phi_j dG, \\ F_j = - \iint_{S_n} f \phi_j |J| d\xi_1 d\xi_2. \quad (5.47)$$

Далее уравнения, полученные для всех элементов, собираются в единую систему линейных уравнений, а матрицы жесткости для каждого элемента K дают в сумме глобальную матрицу жесткости \mathbf{K}

$$\mathbf{K} \mathbf{p} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}, \quad (5.48)$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$ – вектор, состоящий из значений давления в узловых точках всех элементов, \mathbf{K} – матрица размера $N \times N$, \mathbf{Q}, \mathbf{F} – векторы размера N . После решения системы (5.48) представление решения (5.43) позволяет найти давление в каждой точке поверхности.

Для расчета вектора потока жидкости в точке j , которая принадлежит элементу k , используется формула

$$q_{jk} = -a(\nabla p_{jk}), \quad (5.49)$$

в которой градиент давления в точке элемента рассчитывается по известным коэффициентам p_i :

$$\nabla p(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^M p_i \nabla \phi_i(\xi_1, \xi_2). \quad (5.50)$$

Так как каждая точка принадлежит нескольким элементам, то производится процедура усреднения

$$q_j = \sum_{k=1}^K \alpha_{ik} q_{ik} / \sum_{k=1}^K \alpha_{ik}, \quad (5.51)$$

где α_{ik} – угол раствора элемента k в точке j . Скорость жидкости считается через поток как

$$v_j = q_j / W_j. \quad (5.52)$$

5.2.2. Решение уравнений движения неньютоновской и сжимаемой жидкостей

В случае неньютоновской или сжимаемой жидкости коэффициенты матрицы \mathbf{K} и векторов \mathbf{Q}, \mathbf{F} зависят от решения \mathbf{p} , так как содержат кажущуюся вязкость η_a в (5.38) либо непосредственно давление в (5.38). Поэтому система нелинейных уравнений (5.48) решается итерационным методом релаксации. В качестве вектора неизвестных выбираются значения давления. Релаксационный итерационный метод состоит из следующих шагов.

1. На нулевой итерации $s = 0$ в качестве начального приближения для давления берется его распределение с предыдущего шага по времени $p^s = p^n$.

2. На текущей итерации s по известному распределению давления в каждой точке рассчитываются коэффициенты $a(p^s)$ и $f(p^s)$ из (5.38) или (5.33) и коэффициенты $\mathbf{K}(p^s)$, $\mathbf{Q}(p^s)$, $\mathbf{F}(p^s)$ системы (5.48).
3. Из решения системы (5.48) рассчитывается вспомогательное распределение давления \tilde{p} (5.48).
4. Распределение давления на следующей итерации рассчитывается методом релаксации

$$p^{s+1} = \tilde{p}(r^s) + p^s(1 - r^s). \quad (5.53)$$

Значение релаксационного коэффициента r^s на каждой итерации выбираются таким образом, чтобы ограничить изменение давления задаваемым значением алгоритма r_{\max} :

$$r(s) = r_{\max} \frac{\|p^s\|}{\|p^s - \tilde{p}\|}. \quad (5.54)$$

5. Производится переход на следующую итерацию $s = s + 1$. Шаги 2–4 повторяются, пока не выполнится условие установления

$$\frac{\|p^s - \tilde{p}\|}{\|p^s\|} < \varepsilon_c. \quad (5.55)$$

Значения $r_{\max} = 0.1$ и $\varepsilon_c = 10^{-4}$ позволяют получить устойчивую и достаточно быструю сходимость алгоритма и используются в приведенных ниже расчетах. Ширина криволинейной трещины W берется из решения задачи упругости и не является постоянной как вдоль поверхности трещины, так и во времени.

5.3. Верификация алгоритма решения уравнений движения жидкости

Верификация алгоритма была проведена путем сравнения с точными решениями ряда задач течения жидкости, а также с численным решением, полученным по модели радиальной трещины (см. § 1.2.7).

5.3.1. Плоское движение ньютоновской жидкости в канале постоянного сечения

Рассматривается течение ньютоновской жидкости в канале постоянной ширины $W = 0.05$ мм, представляющем собой часть цилиндрической поверхности радиуса $R = 0.025$ м и высоты $H = 0.02$ м, как показано на рис. 5.3. Жидкость с вязкостью $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ Па·с закачивается в канал с расходом $Q_{\text{in}} = 5 \text{ см}^3/\text{с}$. Давление на выходной границе задается равным $p_{\text{out}} = 10^5$ Па.

Точное решение задачи задается формулой (см. например [205])

$$p(l) = 12 \frac{\mu Q_{\text{in}}}{W^3} l + p_{\text{out}}, \quad (5.56)$$

в которой l – расстояние до выходной границы. Относительная численная погрешность модели течения жидкости демонстрирует второй порядок сходимости метода:

Размер сетки	Погрешность, %
10×30	0.0428
20×60	0.0107
40×120	0.0027

Низкая погрешность метода позволяет использовать достаточно грубые сетки моделирования ГРП.

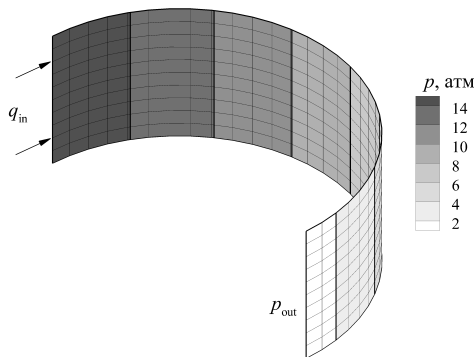


Рис. 5.3. Схема канала постоянного сечения.

5.3.2. Плоскорadiaльное движение жидкости Гершеля–Балкли в канале постоянной ширины при заданном расходе

Рассмотрим радиальное растекание жидкости между двумя параллельными пластинами, расположенными на расстоянии $W = 0.001$ м. Радиус входного сечения составляет $R_{in} = 0.1$ м, радиус выходного $R_{out} = 1$ м. В выходном сечении поддерживается постоянное давление $P_{out} = 0$. Неньютоновская жидкость, описываемая по модели Гершеля–Балкли с реологическими параметрами $K = 100$ Па · с^{*n*} $n = 0.5$, $\tau_0 = 900$ Па закачивается через входное сечение с расходом $Q = 0.5 \cdot 10^{-6}$ м³ / с.

Задача имеет точное аналитическое решение, приведенное, например, в [206]:

$$p(r) = \frac{6\mu Q_{in}}{\pi W^3} \ln\left(\frac{r}{R_{out}}\right) + p_{out}. \quad (5.57)$$

На рис. 5.4 показано сравнение распределений давления вдоль радиальной координаты, полученных аналитически по формуле (5.57) и численно по рассматриваемой двумерной модели с использованием сетки с $N_r=20$ элементами вдоль радиальной координаты и с $N_c=12$ элементами в окружном направлении. Погрешность решения не превосходит 1.2%, что позволяет использовать достаточно грубые сетки для расчета течения жидкости.

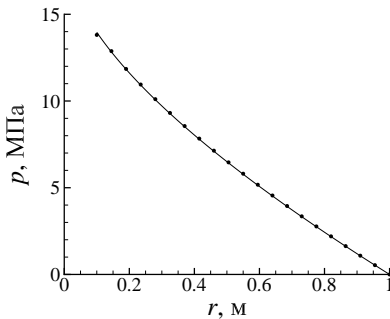


Рис. 5.4. Распределения давления вдоль радиальной координаты для радиального течения жидкости Гершеля–Балкли в канале постоянной ширины с заданным расходом: сплошная линия — точное решение (5.57); точки — численное решение по двумерной модели.

5.3.3. Плоскорадиальное движение жидкости Гершеля–Балкли в канале постоянной ширины при заданном перепаде давления

Рассматривается плоскорадиальное движение жидкости между двумя параллельными пластинами. Расстояние между пластинами равно $W = 0.001$ м, радиус входной границы равен $R_{in} = 0.1$ м. Бингамовская жидкость закачивается через входную границу с постоянным давлением $p_{in} = 1$ МПа. Показатель консистенции составляет $K = 0.3$ Па·с, критическое сдвиговое напряжение варьируется в интервале от $\tau_0 = 0$ до 100 Па. Область, занятая жидкостью, представляет собой круг с внешней границей, обозначенной как R_{out} , на которой поддерживается нулевое давление $P_{out} = 0$. С ростом размера области, занятой жидкостью, сила трения, обусловленная сдвиговыми напряжениями, растет и вызывает уменьшение расхода жидкости Q . Внешняя граница распространяется до тех пор, пока давления достаточно для преодоления сил трения. После этого, несмотря на наличие перепада давления, бингамовская жидкость остается неподвижной. На рис. 5.5 показаны зависимости расхода жидкости от радиуса фронта жидкости, рассчитанные по двумерной модели течения жидкости Гершеля–Балкли для различных значений критического сдвигового напряжения τ_0 . Пересечение каждой кривой с горизонтальной осью координат показывает максимальный размер области, ко-

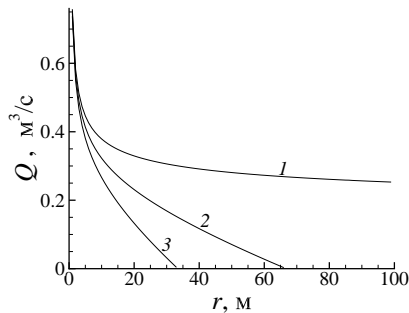


Рис. 5.5. Зависимости расхода жидкости от радиуса внешней границы области, занятой бингамовской жидкостью в канале постоянной ширины, для различных значений критического сдвигового напряжения τ_0 : 1 — $\tau_0 = 0$ Па; 2 — $\tau_0 = 50$ Па; 3 — $\tau_0 = 100$ Па.

торый может быть достигнут при рассматриваемом давлении для данной жидкости. Как и следовало ожидать, увеличение критического сдвигового напряжения приводит к уменьшению максимального размера области, которую жидкость может занять. Для сравнения, кривая 1, соответствующая ньютоновской жидкости с нулевым критическим напряжением сдвига, также представлена на рис. 5.5. Видно, что кривая приближается к горизонтальной оси, но не достигает ее.

5.3.4. Распространение плоской радиальной трещины под действием закачки жидкости Гершеля–Балкли

Как уже отмечалась выше, предложенная в данной работе модель выгодно отличается от других имеющихся трехмерных моделей тем, что она напрямую учитывает как эффект от ствола скважины, так и эффект от переменной вдоль берегов трещины нагрузки, связанной с течением жидкости со сложной реологией. Это делает ее привлекательной для моделирования ранней стадии роста трещины ГРП и, в частности, для изучения искривления трещины в окрестности скважины. Обзор результатов, полученных на основе модели, начнем с анализа чувствительности поведения трещины в прискважинной зоне к вариациям входных параметров задачи и, прежде всего, к параметрам реологии закачиваемой жидкости. В общем случае ненулевые значения K и τ_0 и $n \neq 1$ соответствуют модели Гершеля–Балкли.

С этой целью были проведены серии расчетов при следующих базовых значениях входных параметров. Скважина радиуса $R_w = 0.12$ м повернута вокруг оси x на угол α (угол наклона скважины), как показано на рис. 5.6. На скважине имеется плоская поперечная начальная трещина с внешним радиусом $R_{in} = 0.25$ м, перпендикулярная скважине. Сжимающие напряжения в естественном залегании равны $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = 16$ МПа, $\sigma_z^\infty = 12$ МПа. Механические свойства вмещающей породы описываются следующими параметрами: модуль Юнга $E = 20$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, коэффициент трещиностойкости $K_{Ic} = 3$ МПа $\sqrt{м}$. С расходом $Q_{in} = 0.1$ м³/с в скважину закачивается неньютоновская жидкость, характери-

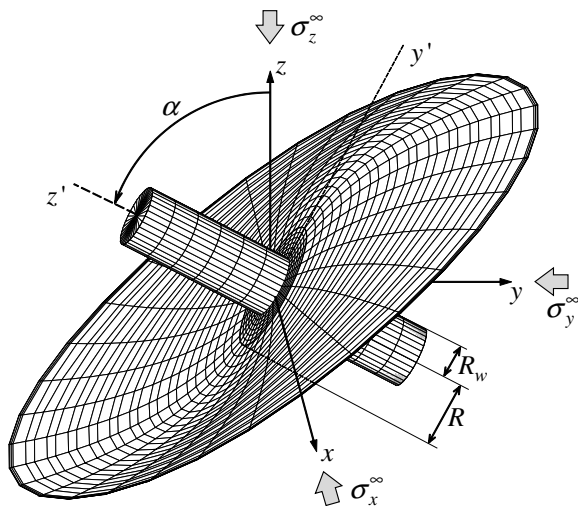


Рис. 5.6. Схема наклонной скважины с зародышевой поперечной трещиной.

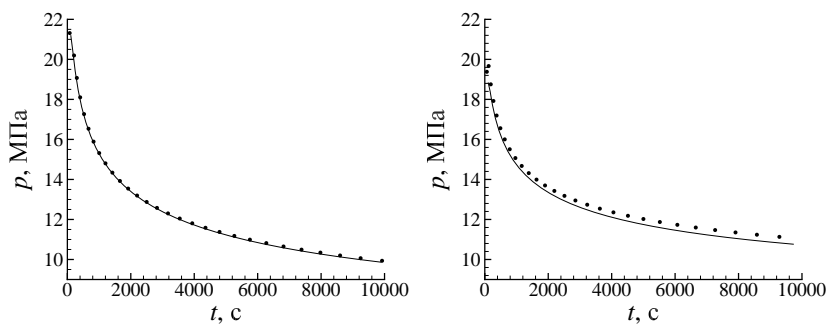


Рис. 5.7. Зависимость ширины трещины от времени при распространении плоской радиальной трещины при закачке ньютоновской (слева) и неньютоновской (справа) жидкости: сплошная линия — одномерная модель; точки — трехмерная модель, $N_c=32$.

зующаяся фактором консистенции K , показателем степени и критическим значением сдвиговых напряжений τ_0 .

Было рассмотрено два случая распространения плоской радиальной трещины. В первом случае в скважину закачивается ньютоновская жидкость с вязкостью $\mu = 1000 \text{ Па} \cdot \text{с}$ с расходом $Q = 32 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / \text{с}$, а во втором — жидкость Гершеля–Балкли с реологическими параметрами $K = 1000 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$, $n = 0.5$,

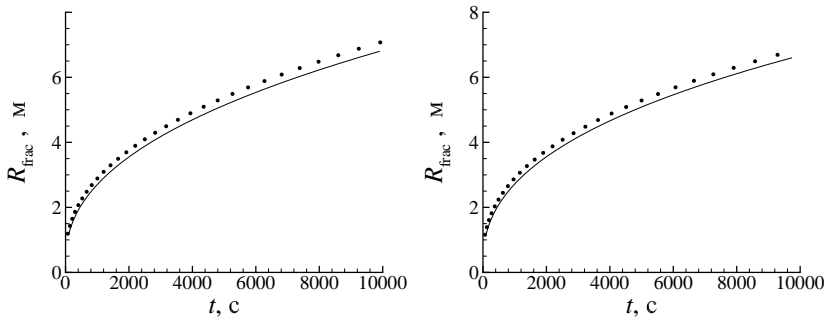


Рис. 5.8. Зависимость радиуса трещины от времени при распространении плоской радиальной трещины при закачке ньютоновской (слева) и неньютоновской (справа) жидкости: сплошная линия — одномерная модель; точки — трехмерная модель, $N_c=32$.

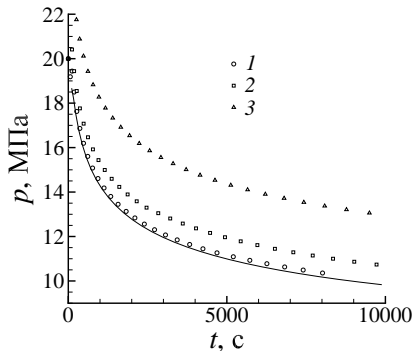


Рис. 5.9. Зависимость давления в скважине от времени при распространении плоской радиальной трещины при закачке неньютоновской жидкости, полученная на различных сетках: сплошная линия — одномерная модель, 1 — $N_c = 32$, 2 — $N_c = 16$; 3 — $N_c = 8$.

$\tau_0 = 400$ Па с тем же расходом. Скважина расположена вертикально ($\alpha = 0$), ее радиус равен $R_w = 0.5$ м. Радиус зародышевой трещины равен $R_{in} = 1$ м. Порода с упругими свойствами $E = 20$ ГПа, $\nu = 0.2$, $K_{Ic} = 3$ МПа $\sqrt{м}$ сжата на бесконечности следующими напряжениями: $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = 4$ МПа, $\sigma_z^\infty = 3$ МПа. Расчеты были проведены как по трехмерной модели гидроразрыва, так и по одномерной модели радиальной трещины, описанной в § 1.2.7. В трехмерной модели использовалась сетка

с $N_c = 32$ элементами в окружном направлении. Сетка для одномерной модели была выбрана такой, что дальнейшее ее сгущение не приводило к изменениям результатов.

Распределения давления в скважине и радиуса трещины от времени приведены на рис. 5.7 и рис. 5.8. Можно заметить, что расчет радиуса по трехмерной модели вносит некоторую погрешность, одинаковую для ньютоновской и неньютоновской жидкостей. Погрешность трехмерной модели при расчете давления в трещине незначительна для обеих рассмотренных жидкостей. На рис. 5.9 показана сходимость давления, полученного по трехмерной модели, к точному решению, полученному по радиальной модели, при сгущении сетки.

5.4. Моделирование распространения трехмерной трещины, вызванного закачкой жидкости Гершеля–Балкли

5.4.1. Чувствительность поведения трещины к углу наклона скважины

Сначала оценим, как угол наклона скважины влияет на траекторию трещины в прискважинной зоне. Расчеты были проведены для следующих реологических параметров жидкости: $K = 0.075 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $n = 1$, $\tau_0 = 11 \text{ Па}$ и различных значений отклонения оси скважины от вертикали: $\alpha = 0, 15, 30, 45, 60^\circ$. Во всех случаях (за исключением случая 1, когда результирующая трещина является плоской) форма развивающейся трещины подобна той, что представлена на рис. 5.6. В каждом радиальном сечении фронт трещины стремится повернуться в направлении предпочтительной плоскости трещины, которая перпендикулярна направлению действия минимальных главных сжимающих напряжений. Можно видеть, что наибольшее искривление формы трещины по сравнению с другими радиальными сечениями имеется в сечении yz . На рис. 5.10 представлены расчетные траектории распространения трещины в радиальном сечении yz , полученные при различных углах наклона скважины.

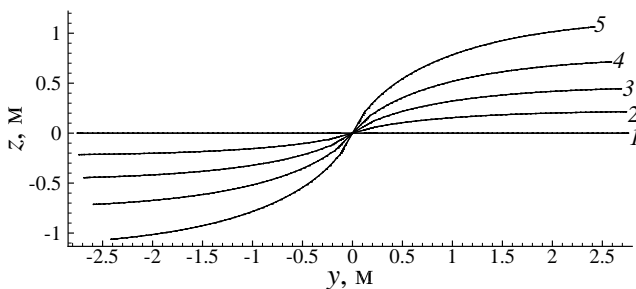


Рис. 5.10. Траектории трещины в плоскости yz для неьютоновской жидкости с $K = 0.075 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $n = 1$, $\tau_0 = 11 \text{ Па}$ для различных углов наклона скважины $\alpha = 0$ (1), 15 (2), 30 (3), 45 (4), 60° (5).

Таблица 5.1. Влияние угла наклона скважины на размер искривленной части трещины, в диаметрах скважины

Угол наклона скважины, град.	Размер трещины, отклоняющейся от ППТ менее, чем на 10°	Размер трещины, отклоняющейся от ППТ менее, чем на 5°
15	2	3
30	4	7
45	6	9
60	7	10

Как и ожидалось, чем больше угол наклона скважины, тем большее время (или расстояние) требуется трещине, чтобы переориентироваться на ППТ-направление. Трещина, распространяющаяся от наклоненной на 60° скважины, распространяется в ППТ с точностью в 10° (5°) при достижении ей радиуса в 7 (10) диаметров скважины. Значения размера трещины для других углов наклона скважины приведены в табл. 5.1.

5.4.2. Чувствительность поведения трещины к реологическим параметрам жидкости

Рассмотрим, как параметры реологии закачиваемой жидкости влияют на ее поведение в прискважинной зоне. Анализ чувствительности проведем для угла наклона скважины $\alpha = 60^\circ$.

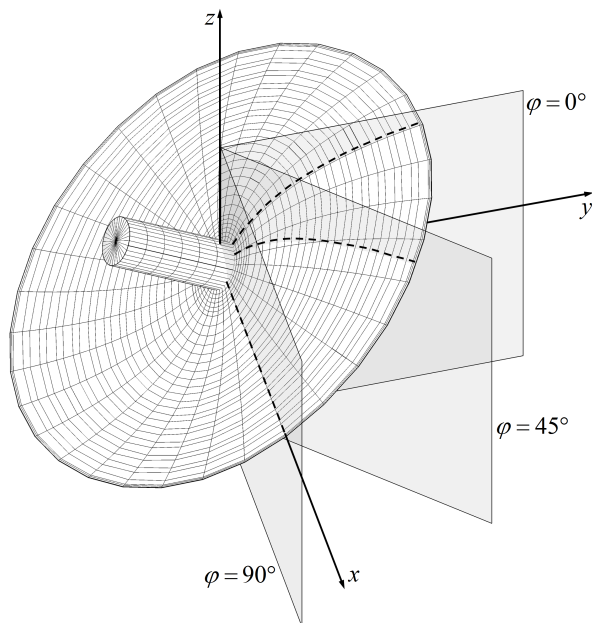


Рис. 5.11. Формы трещины для $\alpha = 60^\circ$ и анализируемые сечения трещины.

Из трех реологических параметров K , n , τ_0 два будем фиксировать, а третий будем варьировать в достаточно широких пределах. При выбранных параметрах форма получающейся трещины является существенно трехмерной, и для наглядности рассчитываемых величин мы будем представлять их графики для нескольких выделенных радиальных сечений трещины. В силу выбранной ориентации скважины относительно главных сжимающих напряжений трещина симметрична относительно плоскости yz и относительно оси вращения Ox (см. рис. 5.6), поэтому достаточно рассмотреть радиальные сечения только в одном квадранте.

Далее мы будем рассматривать три сечения (рис. 5.11), которые соответствуют следующим значениям угловой координаты φ : 0° (плоскость yz), 45° , 90° (плоскость xz).

Влияние фактора консистенции

Зафиксируем значения показателя степени $n = 1$ и критического сдвигового напряжения $\tau_0 = 0$ Па и рассмотрим три раз-

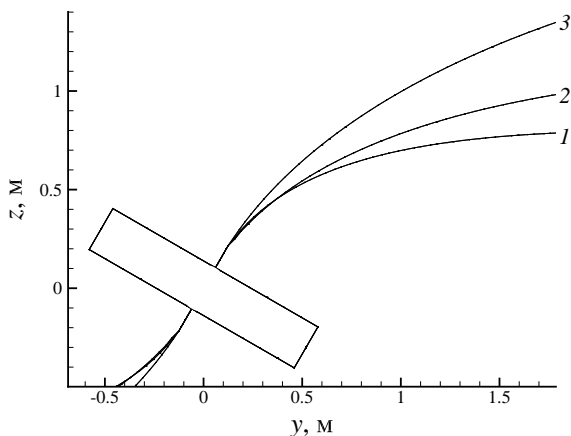


Рис. 5.12. Траектории трещины в плоскости yz для ньютоновской жидкости и угла наклона скважины $\alpha = 60^\circ$: 1 — $K = 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$; 2 — $K = 0.3 \text{ Па} \cdot \text{с}$; 3 — $K = 3 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

личных значения фактора консистенции $K = 0.03, 0.3, 3 \text{ Па} \cdot \text{с}$. Такие значения параметров соответствуют реологии ньютоновской жидкости. На рис. 5.12 представлены расчетные траектории трещины в радиальном сечении yz ($\varphi = 0^\circ$). Здесь прямоугольник обозначает положение скважины, а ППТ совпадает с направлением оси Oy . Нетрудно видеть, что чем выше фактор консистенции, тем траектория трещины более пологая и она медленнее выходит на направление ППТ.

Профиль раскрытия трещины и давления жидкости в выделенных радиальных сечениях в один и тот же момент времени показаны на рис. 5.13 и рис. 5.14 соответственно для низкого и высокого значений фактора консистенции. Переменная r на этих рисунках обозначает радиальную координату соответствующей точки трещины в цилиндрической системе координат, ось которой совпадает с вертикальной осью Oz (см. рис. 5.11), а начало координат — с центром зародышевой трещины. Можно видеть, что в случае малой вязкости в секторе $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$ имеется небольшое сужение трещины: не более 10–15% от ее максимальной ширины. Однако, сравнивая с профилем раскрытия в сечении $\varphi = 90^\circ$, мы приходим к выводу, что имеет место вовсе не сужение, а, скорее наоборот,

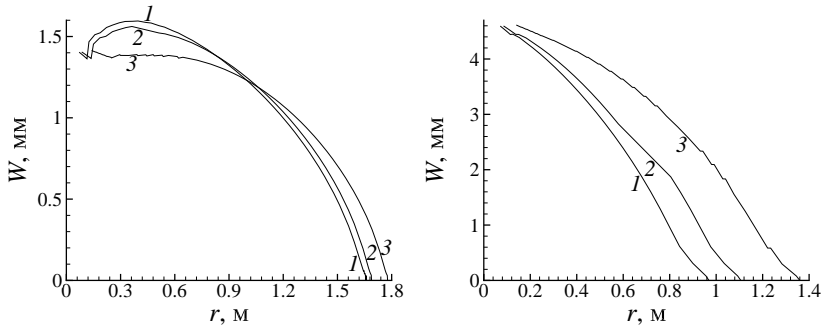


Рис. 5.13. Распределение ширины трещины вдоль радиальной координаты при $\alpha = 60^\circ$ для ньютоновской жидкости с $K = 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$ (слева) и $K = 3 \text{ Па} \cdot \text{с}$ (справа): 1 — $\varphi = 0^\circ$; 2 — $\varphi = 45^\circ$; 3 — $\varphi = 90^\circ$.

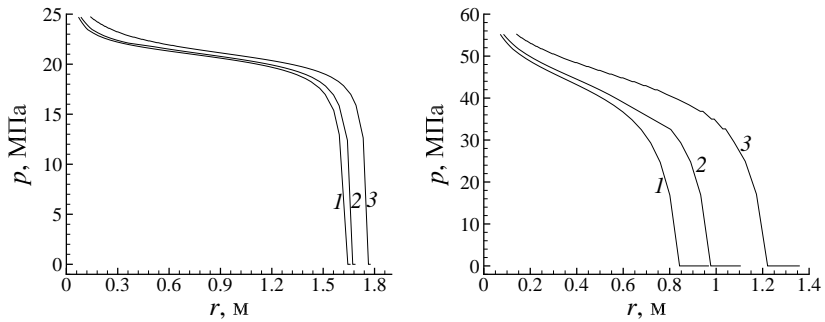


Рис. 5.14. Распределение давления жидкости вдоль радиальной координаты при $\alpha = 60^\circ$ для ньютоновской жидкости. Усл. обозн. см. рис. 5.13.

рот, расширение трещины в зоне, простирающейся на несколько диаметров от скважины. В случае высоковязкой жидкости раскрытие максимально у скважины и монотонно уменьшается с удалением от нее подобно поведению раскрытия в случае плоской трещины.

В случае маловязкой жидкости профиль давления более заполненный, чем для высоковязкой, как показано на рис. 5.14: давление почти постоянно на большей части трещины и резко падает вблизи фронта. Несмотря на некоторое расширение трещины при $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$ (как показано на рис. 5.13, слева), давление жидкости практически одинаково во всех вы-

деленных сечениях. В случае высоковязкой жидкости давление в трещине гораздо более чувствительно к искривлению траектории. В наиболее искривленном сечении ($\varphi = 90^\circ$) оно падает значительно быстрее. Это приводит к заметным различиям в проникании трещины в породу по разным направлениям. Как видно на рис. 5.13, проникание в направлении плоскости xz ($\varphi = 90^\circ$) почти на 40% больше, чем в направлении плоскости yz ($\varphi = 0^\circ$). В случае маловязкой жидкости это различие составляет лишь около 8%.

Влияние критического напряжения сдвига

Чтобы показать эффект от критического напряжения сдвига, зафиксируем значения показателя степени $n = 1$ фактора консистенции $K = 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$ и рассмотрим два различных значения критического напряжения сдвига: $\tau_0 = 0 \text{ Па}$ и $\tau_0 = 1000 \text{ Па}$. При ненулевом значении τ_0 такое сочетание параметров соответствуют реологии бингамовской жидкости. На рис. 5.15 представлены рассчитанные траектории трещины в радиальном сечении yz . Нетрудно видеть, что в выбранном достаточно широком диапазоне значений траектория трещины почти нечувстви-

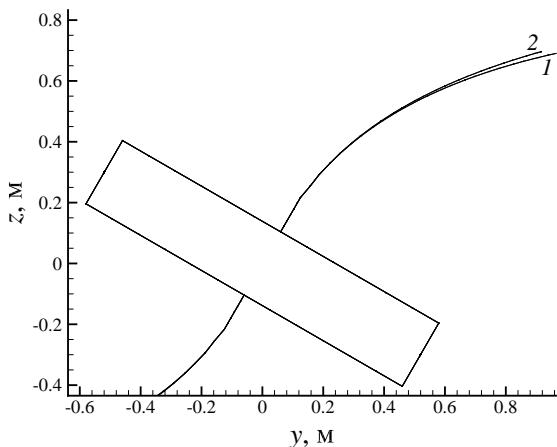


Рис. 5.15. Траектории трещины в плоскости yz при угле наклона скважины $\alpha = 60^\circ$ для бингамовской жидкости с $K = 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$:
 1 — $\tau_0 = 0$; 2 — $\tau_0 = 1000 \text{ Па}$.

тельна к критическому напряжению сдвига. Это связано с тем, что на раннем этапе развития поперечной трещины из-за радиального растекания скорости сдвига в трещине очень высоки, и вклад критического напряжения сдвига в сдвиговые напряжения становится пренебрежимо малым. Данный результат будет обсуждаться более подробно в следующем разделе (5.4.2).

Влияние показателя степени

В этом разделе покажем, как изменение показателя степени влияет на поведение трещины. Рассмотрим три жидкости с одинаковыми значениями фактора консистенции $K = 0.66 \text{ Па} \cdot \text{с}$ и критическим напряжением сдвига $\tau_0 = 0$ и различными значениями показателя степени $n = 1, 0.9, 0.8$. Такое сочетание параметров при $n \neq 1$ соответствует модели степенной жидкости. На рис. 5.16 представлены рассчитанные траектории трещины в радиальном сечении yz . Профиль раскрытия трещины и давления жидкости в трех выделенных радиальных сечениях показаны на рис. 5.17 и рис. 5.18 соответственно для одного и того же момента времени и для двух значений показателя степени. Сравнивая кривые, представленные на рис. 5.12–5.14, с кривыми на рис. 5.16–5.18, приходим к выводу, что в целом увеличение показателя степени имеет те

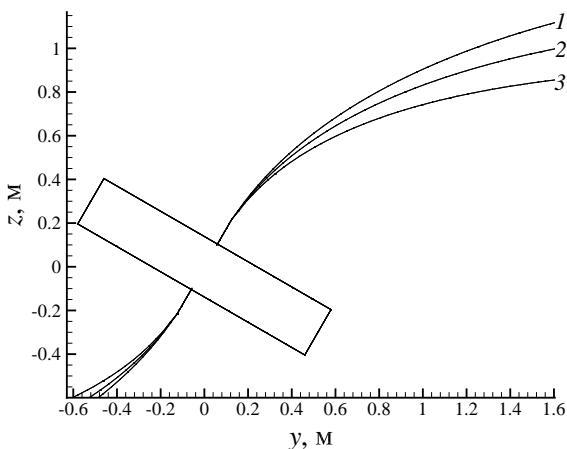


Рис. 5.16. Траектории трещины в плоскости yz при угле наклона скважины $\alpha = 60^\circ$ для степенной жидкости с $K = 0.66 \text{ Па} \cdot \text{с}$:
 1 — $n = 1$; 2 — $n = 0.9$; 3 — $n = 0.8$.

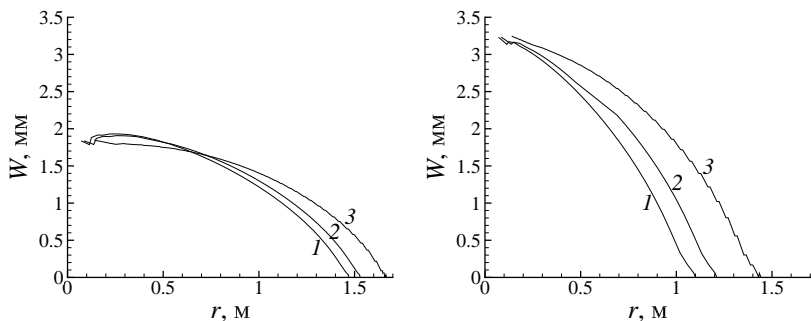


Рис. 5.17. Распределение ширины трещины вдоль радиальной координаты при $\alpha = 60^\circ$ для степенной жидкости с $K = 0.66 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $n = 0.8$ (слева) и $K = 0.66 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $n = 1$ (справа): 1 — $\varphi = 0^\circ$; 2 — $\varphi = 45^\circ$; 3 — $\varphi = 90^\circ$.

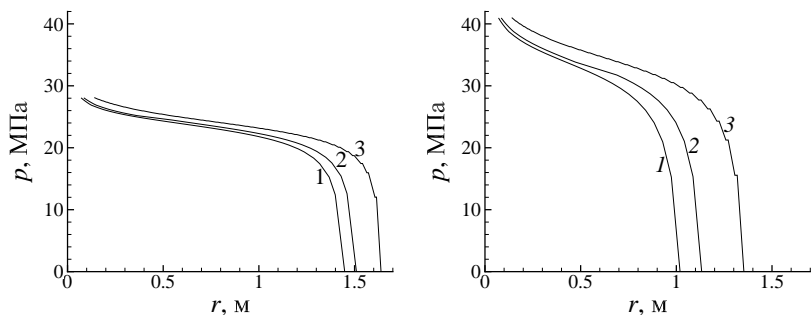


Рис. 5.18. Распределение давления жидкости вдоль радиальной координаты при $\alpha = 60^\circ$ для степенной жидкости. Усл. обозн. см. рис. 5.17.

же последствия, что и увеличение фактора консистенции: чем он выше, тем медленнее происходит переориентация трещины в направлении ППТ. Раскрытие трещины растет с увеличением показателя степени. Сужения ширины трещины в прискважинной зоне практически не наблюдается. С ростом показателя степени усиливается неравномерность распространения трещины вдоль различных радиальных направлений.

Проведенный анализ показывает, что в поперечных трещинах в силу особенности их геометрии не наблюдается существенного пережатия трещины в окрестности скважины, известного в нефте- и газодобыче как «pinching». Искривление и кручение трещины влияет лишь на степень ее проникания в

породу по различным радиальным направлениям. В рассмотренном случае ориентации скважины относительно внешних напряжений в сечении, содержащем ось наклонной скважины, проникание является наименьшим по сравнению с другими направлениями. Сделанные выводы, однако, не следует непосредственно переносить на другие типы геометрий трещины, например, на трещины ленточного типа (подобные PKN), которые требуют отдельного исследования.

Влияние параметров реологии при постоянной кажущейся вязкости

Представляется разумным оценивать влияние реологии жидкости на процесс развития трещины, выбирая жидкости с разной реологией, но одинаковой кажущейся вязкости, которая рассчитывается по формуле [207]

$$\mu_{app} = (K\dot{\gamma}^n + \tau_0)/\dot{\gamma}, \quad (5.58)$$

где $\dot{\gamma}$ есть скорость сдвига.

Как следует из формулы (5.58), кажущаяся вязкость зависит от скорости сдвига, которая может существенно различаться при течении жидкости вдоль трещины гидроразрыва. Поэтому было решено сравнивать жидкости с одинаковой кажущейся вязкостью, рассчитанной при таких скоростях сдвига, которые, с одной стороны, рекомендованы при лабораторном тестировании жидкостей гидроразрыва – в интервале от 5 до 170 с^{-1} [208] и, с другой стороны, считаются типичными для течения в трещине – 50 с^{-1} [209]. Для определенности мы выбрали значение скорости сдвига, равное $\dot{\gamma} = 50 \text{ с}^{-1}$. Расчеты развития трещины были проведены для случая плоской трещины ($\alpha = 0^\circ$) и четырех жидкостей с различной реологией, которые являются частными случаями жидкости Гершеля–Балкли:

- 1) ньютоновская жидкость 1: $K = 0.075 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$, $n = 1$, $\tau_0 = 0 \text{ Па}$;
- 2) ньютоновская жидкость 2: $K = 0.3 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$, $n = 1$, $\tau_0 = 0 \text{ Па}$;
- 3) степенная жидкость: $K = 0.66 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$, $n = 0.8$, $\tau_0 = 0 \text{ Па}$;
- 4) бингамовская жидкость: $K = 0.075 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$, $n = 1$, $\tau_0 = 11 \text{ Па}$.

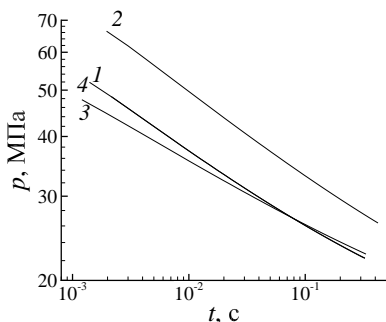


Рис. 5.19. Зависимость давления в скважине от времени при $\alpha = 0$: 1 — ньютоновская жидкость 1; 2 — ньютоновская жидкость 2; 3 — степенная жидкость; 4 — бингамовская жидкость.

Для последних трех жидкостей кажущаяся вязкость, рассчитанная по формуле (5.58) при значении скорости сдвига $\dot{\gamma} = 50 \text{ с}^{-1}$, одинакова и равняется $\mu_{app} = 0.3 \text{ Па} \cdot \text{с}$. Это значение попадает в интервал, характерный для кросс-линкованных гелей, использующихся при проведении ГРП. Выбор параметров для первой жидкости будет пояснен ниже.

На рис. 5.19 в логарифмическом масштабе представлена зависимость давления в скважине от времени. Легко увидеть, что хотя кажущаяся вязкость жидкостей 2–3 при $\dot{\gamma} = 50 \text{ с}^{-1}$ одинакова, средние значения давления для степенной жидкости (кривая 3) и бингамовской жидкости (кривая 4) существенно отличаются от среднего давления, полученного для ньютоновской жидкости 2. Различие между кривой 2 и кривыми 3, 4 составляет от 20 до 50%. Это означает, что использование модели ньютоновской жидкости при моделировании ГРП с неньютоновской жидкостью может привести к ошибке при определении давления в скважине величиной от 20 до 50%.

Это объясняется тем, что характерные скорости сдвига на раннем этапе развития поперечной трещины существенно отличаются от значения 50 с^{-1} , которое было использовано при определении кажущейся вязкости степенной и бингамовской жидкостей при расчете кривых давления. На рис. 5.20 в разные моменты времени показаны распределения кажущихся скоростей сдвига вдоль радиальной координаты для случая ньютоновской жидкости 2 ($K = 0.3 \text{ Па} \cdot \text{с}$). Кажущиеся скорости сдвига были посчитаны по формуле [205]

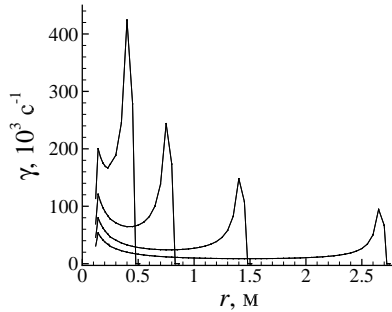


Рис. 5.20. Распределения кажущихся скоростей сдвига вдоль радиальной координаты в разные моменты времени для случая ньютоновской жидкости 2.

$$\dot{\gamma} = 6|\mathbf{u}|/W, \quad (5.59)$$

в которой $|\mathbf{u}|$ модуль скорости, а W – ширина трещины.

Легко видеть, что графики на рис. 5.20 находятся в интервале $50 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1} < \dot{\gamma} < 200 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$. Это означает, что характерная величина скорости сдвига на начальном этапе распространения трещины как минимум на три порядка больше величины, рекомендуемой для лабораторных исследований. Для определенности выберем величину $\dot{\gamma} = 50 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ в качестве характерной и рассчитаем кажущуюся вязкость для рассматриваемых степенной и бингамовской жидкостей, используя формулу (5.58). Полученные кажущиеся вязкости для обеих жидкостей будут приблизительно равны вязкости ньютоновской жидкости $1 \mu_{app} = 0.075 \text{ Па} \cdot \text{с}$, что в четыре раза меньше, чем кажущаяся вязкость для жидкостей 2–4, рассчитанная при $\dot{\gamma} = 50 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$. Как видно на рис. 5.19, давление, соответствующее ньютоновской жидкости 1 (кривая 1, $\mu = 0.075 \text{ Па} \cdot \text{с}$), близко к давлению, полученному при закачке неньютоновских жидкостей с той же кажущейся вязкостью, рассчитанной при характерных для начальной стадии развития трещины значениях скоростей сдвига (кривые 3, 4).

Такие же различия между кривыми для жидкостей с различными реологиями наблюдаются на рис. 5.21, где приведены распределения давления и ширины трещины вдоль радиальной

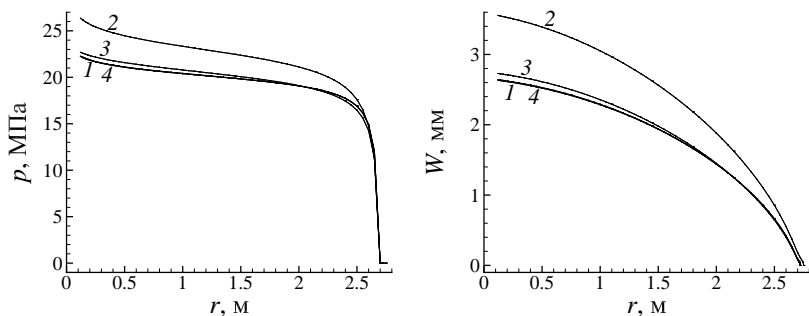


Рис. 5.21. Распределения давления жидкости (слева) и ширины трещины (справа) вдоль радиальной координаты в момент достижения радиусом трещины $R = 2.7$ м: 1 — ньютоновская жидкость 1; 2 — ньютоновская жидкость 2; 3 — степенная жидкость; 4 — бингамовская жидкость.

координаты в момент времени, когда радиус трещины достиг $R = 2.7$ м.

Рисунки 5.19 и 5.21 показывают, что правильный выбор кажущейся вязкости позволяет существенно уменьшить погрешность расчета давления в скважине и ширины трещины при использовании модели ньютоновской жидкости для описания неньютоновских жидкостей. Для степенной жидкости погрешность уменьшается до 10%, а для бингамовской — до 0.5%. Ньютоновская жидкость 1 (кривая 1) и бингамовская жидкость (кривая 4) имеют один и тот же фактор консистенции и различаются только значением критического сдвигового напряжения $\tau_0 = 0$ Па и $\tau_0 = 11$ Па соответственно. Тот факт, что кривые 1 и 4 практически совпадают, означает, что движение бингамовской жидкости на начальном этапе распространения трещины может описываться по модели ньютоновской жидкости, вязкость которой равна фактору консистенции исходной жидкости. При этом критическим напряжением сдвига можно пренебречь. Это объясняется тем, что слагаемое $\tau_0/\dot{\gamma}$ в формуле (5.58) пренебрежимо мало по сравнению со слагаемым $K\dot{\gamma}^n/\dot{\gamma}$ и не оказывает влияния на кажущуюся вязкость.

Следует отметить, что такой вывод обоснован лишь для высоких значений скоростей сдвига, которые характерны, например, для начальной стадии распространения поперечных трещин. Случай умеренных и малых скоростей сдвига рассмотрен в следующем параграфе.

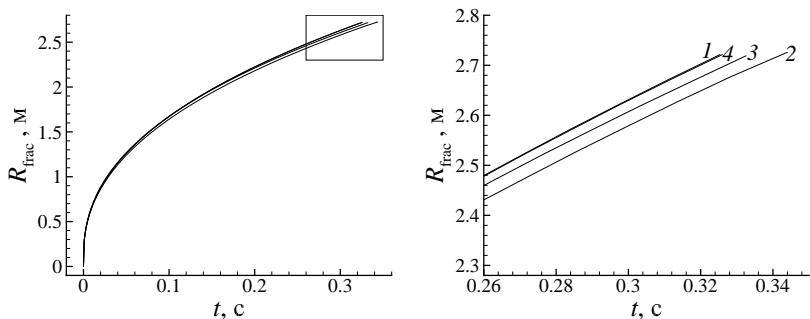


Рис. 5.22. Зависимость радиуса трещины от времени при $\alpha = 0$:
 1 — ньютоновская жидкость 1; 2 — ньютоновская жидкость 2;
 3 — степенная жидкость; 4 — бингамовская жидкость.

Интересен факт, что радиус трещины менее чувствителен к реологическим параметрам закачиваемой жидкости и к кажущейся вязкости, в частности. Так, на рис. 5.22 показано изменение радиуса во времени. Видно, что кривые, соответствующие четырем рассматриваемым жидкостям, слабо отличимы друг от друга.

5.4.3. Влияние реологии при малых сдвиговых напряжениях

В этом параграфе термин «малые скорости сдвига» означает такие скорости сдвига, при которых слагаемые в формуле (5.58) оказывают сравнимое влияние на кажущуюся вязкость. Для исследования влияния реологии закачиваемой жидкости на процесс распространения трещины были выбраны следующие параметры. Радиус скважины, показанной на рис. 5.6, равен $R_w = 0.5$ м, угол наклона скважины $\alpha = 0$. Внешний радиус зародышевой поперечной трещины равен $R_{in} = 1$ м. Напряжения породы в естественном залегании равны $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = 4$ МПа, $\sigma_z^\infty = 3$ МПа. Сама порода характеризуется модулем Юнга $E = 20$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.2$, трещиностойкостью $K_{Ic} = 3$ МПа $\sqrt{м}$. В скважину закачивается жидкость с расходом $Q_{in} = 32 \cdot 10^{-3}$ м³/с. Базовое значение фактора консистенции равно $K = 1000$ Па \cdot с ^{n} . Значения показателя степени n и критического сдвигового напряжения τ_0 варьируются в зависимости от жидкости. Рассмотрены следующие четыре варианта реологии жидкости ($K = 1000$ Па \cdot с ^{n}):

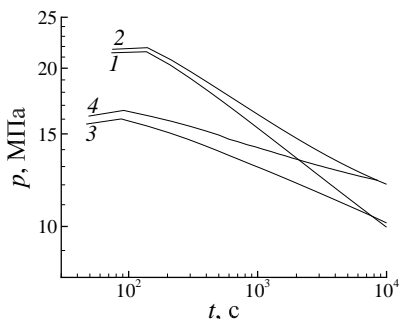


Рис. 5.23. Зависимость давления в скважине от времени в логарифмическом масштабе при $\alpha = 0$: 1 — ньютоновская жидкость; 2 — бингамовская жидкость; 3 — степенная жидкость; 4 — жидкость Гершеля–Балкли.

- 1) ньютоновская: $n = 1$, $\tau_0 = 0$ Па;
- 2) бингамовская: $n = 1$, $\tau_0 = 400$ Па;
- 3) степенная: $n = 0.5$, $\tau_0 = 0$ Па;
- 4) Гершеля–Балкли: $n = 0.5$, $\tau_0 = 400$ Па.

На рис. 5.23 в логарифмическом масштабе показана зависимость давления в скважине от времени для перечисленных реологических моделей закачиваемой жидкости. Можно видеть, что наклоны всех четырех кривых относительно оси абсцисс различаются между собой. Увеличение значения критических сдвиговых напряжений и уменьшение показателя степени приводят к уменьшению угла наклона соответствующей кривой. Первое происходит за счет увеличения давления, необходимого для развития трещины, при больших значениях времени, а второе — за счет уменьшения давления при малых значениях времени. Нетрудно видеть также, что на рассмотренном интервале времени кривая давления в скважине для ньютоновской жидкости не является хорошим приближением ни для одного из случаев закачки неньютоновских жидкостей на рис. 5.23. Необходимо отметить, что это не может быть устранено путем лишь только подбора вязкости ньютоновской жидкости, поскольку изменение ее вязкости не приводит к изменению наклона кривой давления, а меняет лишь величину ее удаления от оси абсцисс. Это можно видеть на рис. 5.24, где представлены зависимости давления в скважине от времени в широком

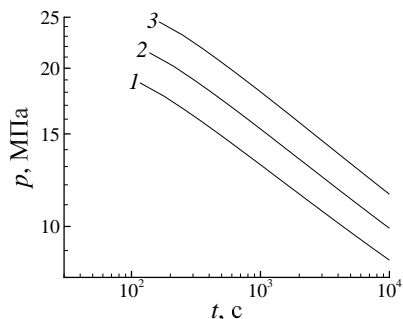


Рис. 5.24. Зависимость давления в скважине от времени в логарифмическом масштабе при $\alpha = 0$ для ньютоновских жидкостей с различными вязкостями: Па · с 500 (1), 1000 (2), 2000 (3).

диапазоне изменения вязкости для случая ньютоновской жидкости.

Следует отметить, что погрешность в расчете давления жидкости влечет за собой погрешность в определении раскрытия трещины. В свою очередь, это может привести к неправильным выводам относительно необходимого объема чистого геля, закачиваемого в скважину перед подачей пропанта, к ошибкам в расчете профиля закрепленной трещины и, в конечном счете, к неверному предсказанию продуктивности скважины после проведения гидроразрыва.

5.4.4. Предельное напряжение сдвига в жидкости как причина остановки трещины гидроразрыва

Обзор полученных результатов завершим ответом на вопрос: возможна ли остановка трещины гидроразрыва, распространяющейся под действием закачки жидкости Гершеля–Балкли? Это вполне уместный вопрос. Реология Гершеля–Балкли предполагает наличие критического напряжения сдвига. Такая особенность реологии приводит к остановке течения жидкости в ряде практических случаев ее применения. Примерами могут служить прокачка через трубу, течение между двумя плоскостями (см § 5.3.3), растекание на плоскости и т. д. Естественно было бы ожидать, что использование жидкости Гершеля–Балкли в качестве жидкости гидроразрыва при определенных

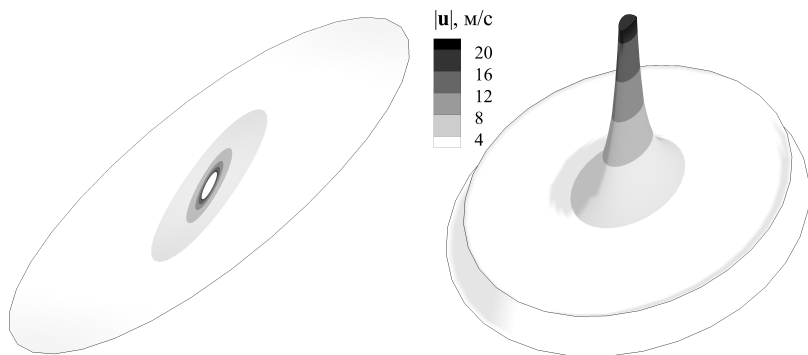


Рис. 5.25. Распределение модуля скорости жидкости по срединной поверхности трещины при $\alpha = 60^\circ$ для жидкости Гершеля–Балкли с параметрами $K = 1000 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$, $n = 0.5$, $\tau_0 = 400 \text{ Па}$.

условиях также будет приводить к остановке распространения трещины, когда давления в скважине не будет достаточно для преодоления сил трения жидкости о берега трещины. Однако, для радиальной трещины это не так. Наши расчеты роста дисковой трещины при постоянном расходе показали, что с ростом трещины давление в скважине не только не растет, но падает (см, например, кривую 4 на рис. 5.23). Но, несмотря на падение давления в скважине, с развитием трещины сила, которая проталкивает жидкость в трещину, растет пропорционально увеличению раскрытия трещины у скважины.

Для иллюстрации этого утверждения на рис. 5.25 показано распределение модуля скорости жидкости по срединной поверхности трещины, полученной при $\alpha = 60^\circ$ для жидкости Гершеля–Балкли с параметрами $K = 1000 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $n = 0.5$, $\tau_0 = 400 \text{ Па}$. Профили скорости для выбранных радиальных сечений $\varphi = 0, 45, 90^\circ$ (как показано на рис. 5.11) показаны на рис. 5.26. Можно видеть, что скорость жидкости становится нулевой только за фронтом жидкости. Это означает, что в трещине отсутствует зона, где бы жидкость была неподвижна.

Утверждение о невозможности остановки трещины справедливо не только для дисковой трещины, но и для любой другой геометрической модели, в которой нет искусственных ограничений для роста раскрытия трещины у скважины (например, и для геометрии, используемой в KGD-модели). Примером таких ограничений является слой более сильно нагру-

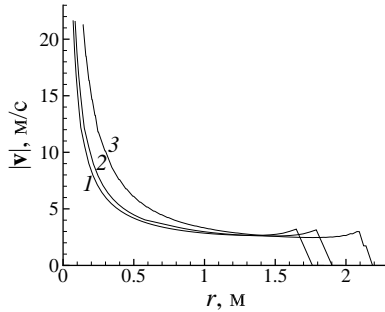


Рис. 5.26. Распределение модуля скорости жидкости вдоль радиальной координаты при $\alpha = 60^\circ$ для жидкости Гершеля–Балкли с параметрами $K = 1000 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$, $n = 0.5$, $\tau_0 = 400 \text{ Па}$: 1 — $\varphi = 0^\circ$; 2 — $\varphi = 45^\circ$; 3 — $\varphi = 90^\circ$.

женной породы, который препятствует росту трещины вдоль скважины. Геометрия трещины, распространяющейся при наличии сильно нагруженного слоя породы, хорошо описывается в рамках модели РКН, которая, по сути, является моделью течения в трубе переменной длины. В случае модели РКН остановка течения в трещине и ее роста представляется вполне вероятной. Возможными сценариями, при которых остановка трещины гидроразрыва, распространяющейся под действием закачиваемой жидкости Гершеля–Балкли, могут быть достижение критических с технологической точки зрения значений давления в скважине в случае закачки с постоянным расходом либо остановка трещины в случае закачки с поддержанием постоянного давления в скважине.

5.5. Моделирование распространения трещины, вызванного закачкой слабожимаемой жидкости

Влияние сжимаемости жидкости на процесс распространения трещины будет показано путем сравнения распространения трещин, вызванных закачкой жидкости с одинаковыми свойствами и различной сжимаемостью. Согласно [210], значение коэффициента сжимаемости для нефти варьируется в интервале $C_0 \in [0.3; 20] \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$. Коэффициент сжимаемости воды, которая является основным компонентом жидкости гидрораз-

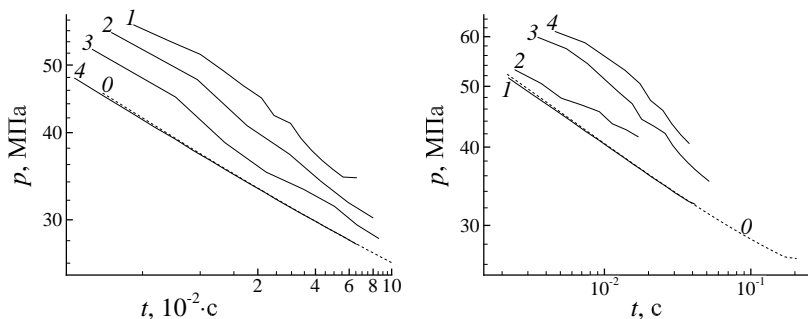


Рис. 5.27. Зависимости давления в скважине от времени при $\alpha = 0^\circ$ (слева) и при $\alpha = 60^\circ$ для жидкостей различной сжимаемости: $C_0 = 20 \cdot 10^{-9}$ (1); $10 \cdot 10^{-9}$ (2); $5 \cdot 10^{-9}$ (3); $2.5 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$ (4); 0 – несжимаемая жидкость.

рыва, равен $C_0 = 0.46 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$, то есть тоже находится внутри указанного интервала. Поэтому для демонстрации влияния сжимаемости были выбраны параметры реологии жидкости, соответствующие ньютоновской жидкости 1 из § 5.4.2, свойства породы и скорость закачки жидкости также были взяты из этого параграфа.

На рис. 5.27 показаны зависимости давления в скважине от времени при $\alpha = 0$ и 60° для жидкостей различной сжимаемости. Легко видеть, что при малом коэффициенте сжимаемости жидкости ($C_0 < 2.5 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$) трещина ведет себя так же, как при закачке несжимаемой жидкости. Увеличение коэффициента сжимаемости приводит к увеличению давления в скважине, необходимого для поддержания постоянного расхода. Такое увеличение может составлять до 20% при коэффициенте сжимаемости $C_0 = 20 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$. На рис. 5.28 показаны распределения давления и ширины трещины вдоль радиальной координаты, полученные при закачке жидкостей различной сжимаемости в наклонную скважину ($\alpha = 60^\circ$) в момент достижения трещинами радиуса 0.7 м. Видно, что различие между ширинами трещин, полученных при закачке сжимаемой и несжимаемой жидкости, может достигать 30%. Кроме того, пережатие трещины в окрестности скважины отсутствует, так же как в расчетах, проведенных в § 5.4.2.

В то же время сжимаемость жидкости оказывает слабое влияние на траекторию трещины. Траектории трещины в плос-

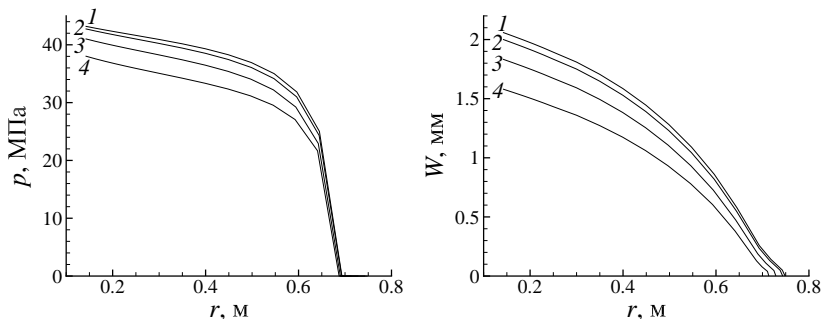


Рис. 5.28. Распределения давления (слева) и ширины трещины (справа) вдоль радиальной координаты при $\alpha = 60^\circ$ для жидкостей различной сжимаемости. Усл. обозн. см. рис. 5.27.

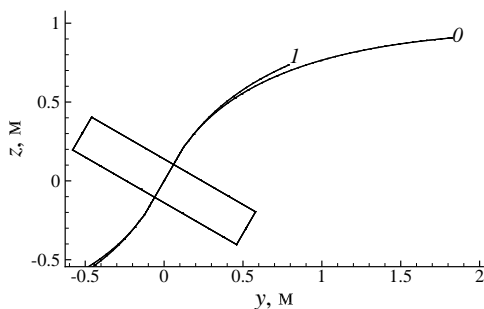


Рис. 5.29. Траектории трещины в плоскости yz для $\alpha = 60^\circ$, полученные при закачке жидкости различной сжимаемости. Усл. обозн. см. рис. 5.27.

кости yz при угле наклона скважины $\alpha = 60^\circ$, полученные при закачке жидкости различной вязкости, различаются незначительно (рис. 5.29).

На основании приведенного исследования можно сделать вывод, что сжимаемость жидкости оказывает влияние на давление и ширину трещины, но практически не сказывается на траектории трещины. Таким образом, сжимаемость необходимо учитывать при моделировании ГРП, так как вызванное сжимаемостью жидкости повышение давления может привести к превышению технологических ограничений насосов, а изменение увеличения ширины трещины – к уменьшению глубины проникновения пропантанта. Траектория же трещины может, по крайней мере в случае поперечных трещин, рассчитываться на основании модели ньютоновской несжимаемой жидкости.

Глава 6

Метод совместного решения уравнений трещины гидроразрыва

При описании распространения трещины ГРП можно выделить три основных режима в зависимости от того, на какой из процессов расходуется основная часть энергии: разрушение породы, вязкая диссипация из-за течения жидкости, потери энергии из-за ее утечки в породу [211]. В первом случае, когда вязкие эффекты в жидкости и утечка в породу оказывают пренебрежимо малое влияние на процесс развития трещины по сравнению с процессом разрушения породы, для описания движения жидкости можно использовать модель невязкой жидкости. Согласно [211], это оправдано в редких случаях трещин большой длины в прочных, слабопроницаемых породах при использовании жидкостей с малой вязкостью. При описании основной части трещин ГРП необходимо учитывать вязкие эффекты и применять одну из моделей вязкой жидкости. В настоящей главе будут описаны алгоритмы совместного решения уравнений упругого равновесия (см. главу 2), течения жидкости (см. главу 5) и разрушения породы (см. главу 4) для случаев использования моделей вязкой и невязкой жидкостей.

6.1. Квазистатистический рост трещины

Пусть есть зародышевая трещина, фронт которой задан вершинами \mathbf{x}_i^0 , $i = 1, \dots, N_{\text{fr}}$. Случаи ненагруженной трещины в растягиваемой среде и нагруженной в сжимаемой среде объединены в алгоритме через обобщенное давление нагружения трещины p . Пошаговое распространение трещины обозначается верхним индексом n . Общая схема алгоритма расчета распространения трещины приведена на рис. 6.1. Итерационный процесс

$$p^{m+1} = \mathbb{P}(p^m) \quad (6.1)$$

вводится в алгоритме для достижения выполнения условия

$$\max_i K_{\text{I}}(\mathbf{x}_i^{n+1}, p^m) = K_{\text{I}c}. \quad (6.2)$$

Итерациями

$$L_i^{s+1} = \mathbb{L}(L_i^s), \quad \theta_i^{s+1} = \mathbb{Q}(\theta_i^s) \quad (6.3)$$

достигается выполнение условий

$$K_{\text{I}}(\mathbf{x}_i^{n+1}, p^m) = K_{\text{I}c}, \quad K_{\text{II}}(\mathbf{x}_i^{n+1}, p^m) = 0 \quad (6.4)$$

в каждой вершине фронта трещины на $(n + 1)$ -м шаге ее распространения.

Итерационные схемы (6.1) и (6.3) построены на основе методов решения уравнений (6.2) и (6.4) соответственно. В представленном на рис. 6.1 алгоритме на каждом шаге распространения в каждой вершине фронта трещины критерии (4.5) и (4.3) реализуются итерационно с заданной точностью. Если в качестве критерия распространения взять масштабирующий закон для приращения фронта трещины (4.16), а направление распространения непосредственно определять по формуле (4.2), то алгоритм значительно упростится и будет выглядеть как на рис. 6.2. Траектории трещин, рассчитанных по представленным на рис. 6.1 и рис. 6.2 алгоритмам, будут сравнены в главе 7.

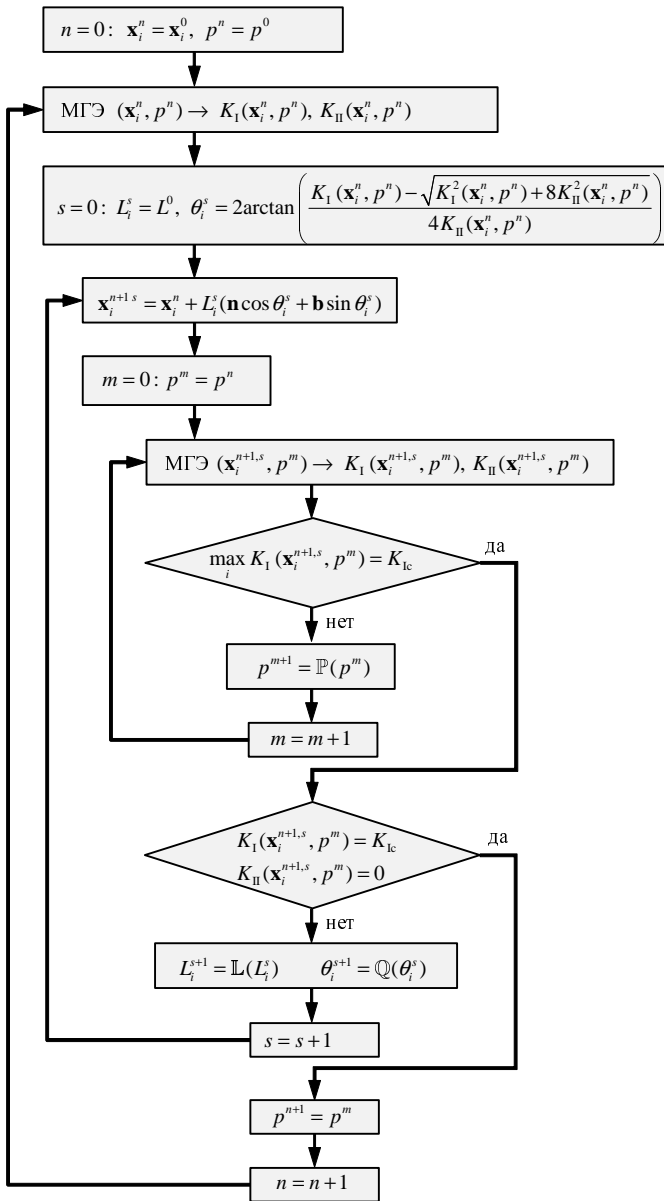


Рис. 6.1. Блок-схема алгоритма квазистатического роста трещины.

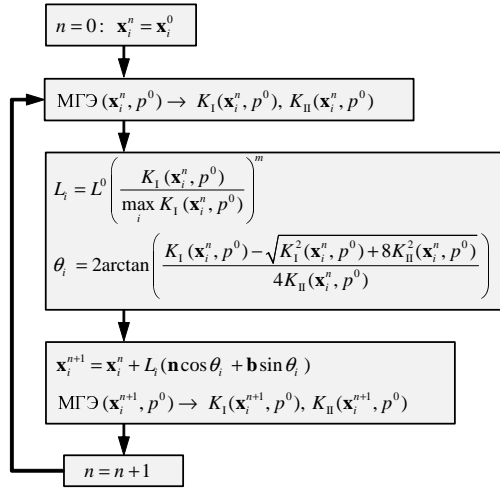


Рис. 6.2. Блок-схема алгоритма усталостного роста трещины.

6.2. Рост трещины под действием вязкой жидкости

При нагружении трещины давлением течения вязкой жидкости (описание модели течения приведено в главе 5) в алгоритм распространения вводятся фронт жидкости, обозначаемый его вершинами $\mathbf{x}_{f,i}^n$, и фронт трещины с вершинами $\mathbf{x}_{r,i}^n$, а также отставание фронта жидкости от фронта трещины $L_{r,i}$. В работе алгоритма участвует объем жидкости V^n , вычисляемый по раскрытию трещины

$$V^n = \int_{S^+} W^n dS. \quad (6.5)$$

Задача «гидродинамика–упругость» в алгоритме на рис. 6.3 дает соотношение между раскрытием трещины $W^{n+1,s}$ и давлением $p^{n+1,s}$, создаваемым течением жидкости в трещине при положении фронта трещины $\mathbf{x}_{r,i}^{n+1,s}$ и фронта жидкости $\mathbf{x}_{f,i}^n$. Схема алгоритма решения задачи «гидродинамика–упругость» представлена на рис. 6.4.

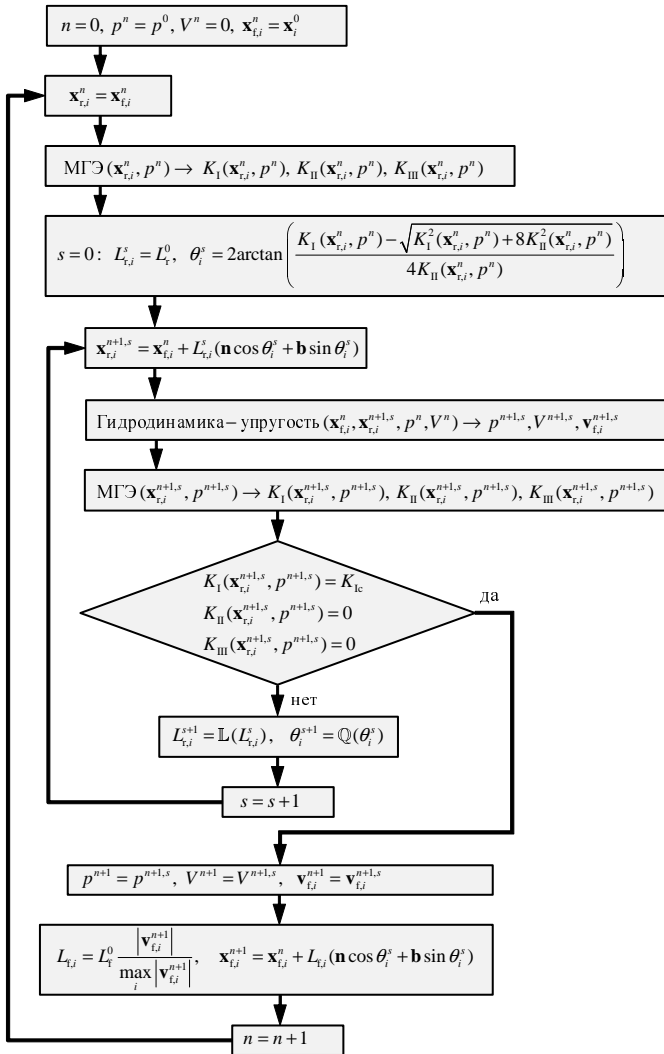


Рис. 6.3. Блок-схема алгоритма динамического роста трещины, обусловленного течением вязкой жидкости.

Итерационный процесс $\Delta t^{k+1} = \mathbb{T}(\Delta t^k)$ вводится для достижения выполнения условия

$$\max_i \left| \mathbf{v}_i^{m+1,k} \right| = v_f, \quad (6.6)$$

выравнивающего максимальную скорость жидкости на ее фронте с кинематическим условием заданного максимльно-

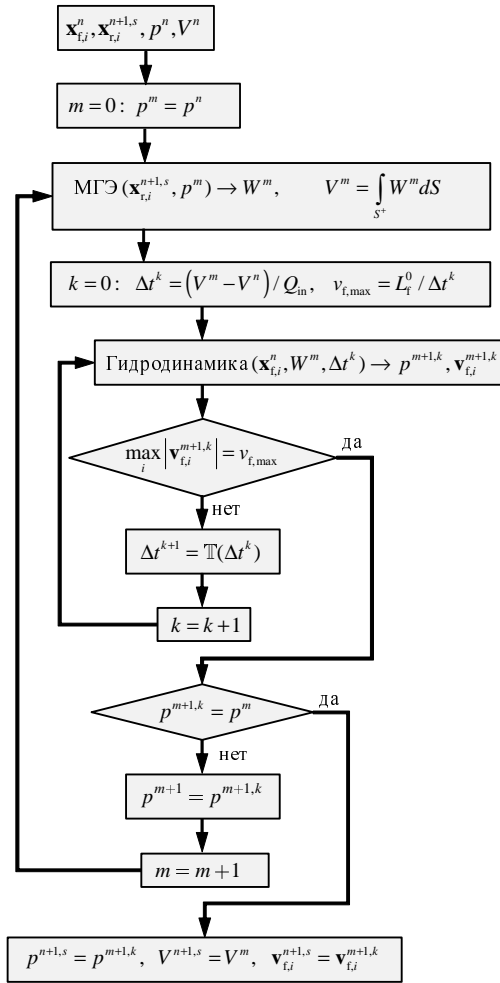


Рис. 6.4. Блок-схема алгоритма решения задачи «гидродинамика–упругость».

го приращения фронта жидкости L_f^0 за промежуток времени Δt , вычисляемый по динамике объема трещины.

Глава 7

Примеры трехмерного моделирования распространения трещин гидроразрыва пласта

7.1. Верификация трехмерной модели на одномерных задачах распростране- ния трещин

7.1.1. Распространение поперечной радиальной трещины

Для верификации модели распространения трещины, нагруженной течением вязкой жидкости, проведено моделирование плоскорадиального распространения трещины под воздействием закачиваемой в нее вязкой жидкости и сравнение с результатами, полученными по одномерной плоскорадиальной модели, описанной в § 1.2.7. Задача решена при значениях параметров: $E = 20$ ГПа, $\nu = 0.2$, $K_{Ic} = 3$ МПа $\sqrt{\text{м}}$, $\sigma_{\min} = 3$ МПа, $\mu = 1000$ Па \cdot с, $Q_{\text{in}} = 16$ см³ / с, $Q_L = 0$. Зародышевая трещина имела радиус $R_0 = 1$ м, радиус скважины $R_w = 0.5$ м. Эта же задача решена с помощью трехмерной модели распростра-

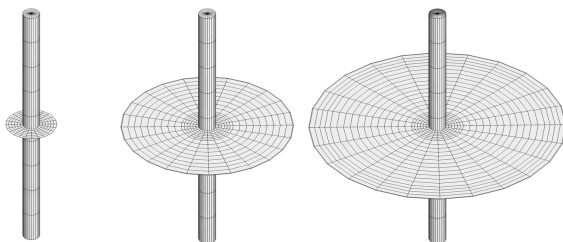


Рис. 7.1. Скважина и поверхность трещины на различных этапах распространения (слева – скважина с зародышевой трещиной).

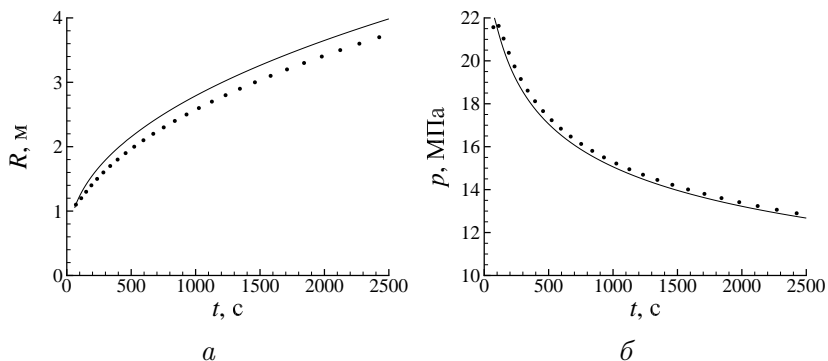


Рис. 7.2. Зависимости радиуса трещины R (а) и давления закачиваемой жидкости в скважине p (б) от времени: одномерная модель § 1.2.7 (сплошная); трехмерная модель (точки).

нения, в которой использовался МГЭ/МТ (см. § 2.2.6). При этом в постановку задачи введена полость скважины с радиусом $R_w = 0.5$ м, на которой задавалась зародышевая трещина с радиусом фронта $R_0 = 1$ м (рис. 7.1). Предполагалось, что критерий распространения трещины ((1.78) для радиальной и (4.5) для трехмерной моделей) выполняется с самого начала решения задачи. Это достигается подбором величины шага по времени Δt , при котором объем жидкости, требуемый для создания давления распространения, будет закачан. Сравнение решений задачи о распространении плоскорадиальной трещины, полученных по одномерной и трехмерной моделям, представлено на рис. 7.2.

7.1.2. Сравнение с аналитическим решением, полученным для режима распространения с доминирующей вязкостью

В работе [211] выделено два режима распространения трещины в зависимости от эффектов, оказывающих наибольшее влияние на поглощение энергии: режим распространения с доминирующей вязкостью, в котором большая часть энергии поглощается вязкими эффектами при течении жидкости в трещине, и режим распространения с доминирующей трещиностойкостью, в котором большая часть энергии расходуется на разрушение породы. Режим с доминирующей трещиностойкостью характеризуется сильным градиентом давления в окрестности фронта жидкости. Если сделано предположение о бесконечной малости величины отставания фронта жидкости от фронта трещины, то этот градиент давления описывается аккуратно. В этом предположении давление на фронте трещины бесконечно и необходимо применение специальных процедур для его описания. В трехмерной модели распространения трещины отставание фронта жидкости от фронта трещины описывается явно, и точный расчет градиента давления требует большого количества вычислительных ресурсов. Поэтому моделирование распространения и сравнение с решением, представленным в [211], приведено только для трещины, распространяющейся в режиме с доминирующей вязкостью.

Для верификации трехмерной модели распространения трещины проведены численное моделирование распространения плоскорадиальной трещины в режиме распространения с доминирующей вязкостью и сравнение результатов с аналитическим решением, полученным в работе [211]. Для сравнения рассматривается скважина радиуса $R_w = 0.02$ м с круговой зародышевой трещиной радиуса $R_w = 0.079$ м, находящаяся в упругой среде, сжатой на бесконечности напряжениями $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma_z^\infty = 41.4$ МПа. Среда характеризуется модулем Юнга $E = 38.8$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.15$ и трещиностойкостью $K_{Ic} = 1$ МПа $\cdot\sqrt{м}$. Ось скважины совпадает с осью y ($\alpha=0$). В скважину закачивается жидкость с вязкостью $\mu = 0.08$ Па \cdot с и расходом $Q_{in} = 0.053$ м³/с.

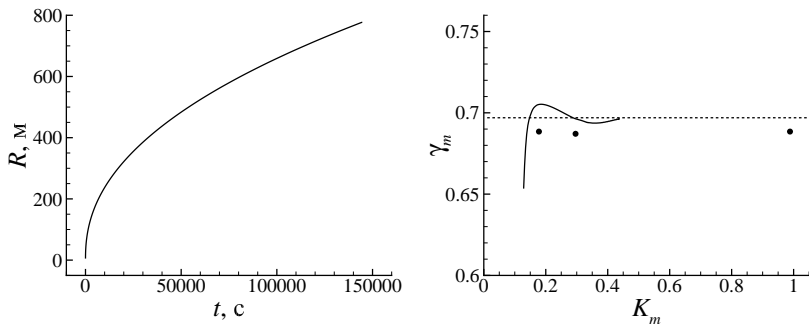


Рис. 7.3. Зависимости размерных (слева) и безразмерных (справа) радиусов трещины от времени: сплошная линия — трехмерная модель; штриховая — аналитическое решение [211]; точки — численное решение [211].

На рис. 7.3 приведена зависимость радиуса трещины R от времени t , полученная по 3D-модели. Там же приведено сравнение зависимости безразмерного радиуса трещины γ_m от безразмерного времени K_m с полученными численно и аналитически в [211]. Безразмерные параметры вычислены по указанным в [211] формулам

$$\gamma_m = R(t)/L(t), \quad L(t) = \left(\frac{E' Q_{\text{in}}^3 t^4}{12\mu} \right)^{1/9}, \quad (7.1)$$

$$K_m = 4K_{Ic} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{t^2}{(12\mu)^5 Q_{\text{in}}^3 E'^{13}} \right)^{1/18}. \quad (7.2)$$

На рис. 7.4 приведены распределения безразмерных ширины

$$\Omega_m = \frac{w}{\varepsilon L}, \quad \varepsilon = \left(\frac{12\mu}{E't} \right)^{1/3} \quad (7.3)$$

и давления

$$P_m = \frac{p}{E'\varepsilon} \quad (7.4)$$

вдоль безразмерного радиуса $\rho = r/R$ в моменты времени $t = 10$ с, $t = 40$ ч, которым соответствуют значения безразмерного времени $K_m = 0.15$ и 0.45 . Там же приведены распределения безразмерных ширины и давления, рассчитанные аналитически и по программе Logames, описанной в [212, 213], приведенные в [211] для тех же моментов безразмерного времени.

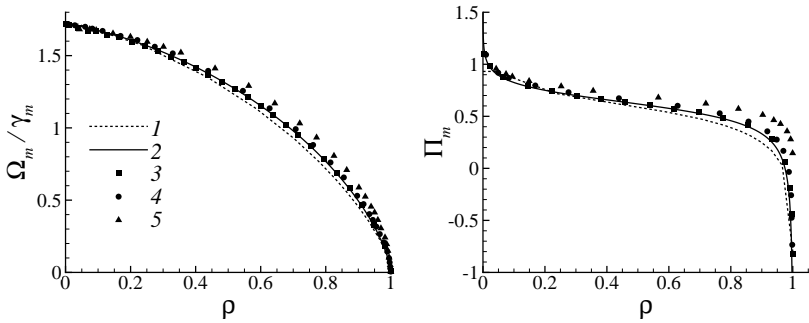


Рис. 7.4. Распределения безразмерной ширины трещины (слева) и безразмерного давления (справа) вдоль радиуса трещины: 1 — трехмерная модель $K_m=0.15$; 2 — трехмерная модель $K_m=0.45$; 3 — аналитическое решение [211] $K_m=0$; 4 — численное решение [211] $K_m=0.15$; 5 — численное решение [211] $K_m=1.5$.

Значению $K_m = 1.5$ соответствует физическое время $t = 300$ лет, которое не может быть рассчитано по трехмерной модели, поэтому вместо него был выбран момент безразмерного времени $K_m = 0.45$.

Трехмерная модель предназначена для расчета начальной стадии гидроразрыва, в которой трещина находится в режиме распространения с доминирующей вязкостью. В этом режиме погрешность при расчете ширины и давления составляет не более 10% (рис. 7.4).

7.2. Моделирование распространения продольной трещины в трехмерной постановке

7.2.1. Квазистатическое распространение продольной трещины от скважины с круговыми пропилами

Описываемая в монографии модель трехмерного распространения трещины была применена для моделирования распространения трещины в условиях эксперимента зарождения трещины от скважины с пропилами, описанного в [176]. Целью эксперимента было изучение инициации нескольких трещин

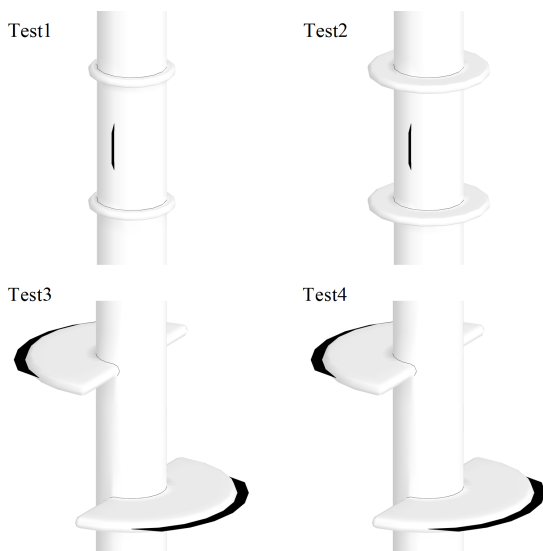


Рис. 7.5. Схема зародышевых трещин, наблюдаемых в эксперименте (см. § 3.3.3).

от скважины с несколькими пропилами (рис. 7.5), при котором возможна реализация одного из сценариев: распространение одной продольной трещины или нескольких поперечных. Инициация трещины для двух из проведенных экспериментов описана в § 3.3.3, а настоящий параграф посвящен моделированию распространения зародившихся трещин, для демонстрации возможностей численного алгоритма описывать эволюцию трещин разных типов.

В экспериментах Test1 и Test2 [176] глубина пропилов составляла 0.125 и 0.375 диаметров скважины. Наблюдалось зарождение трещины на поверхности скважины между двумя пропилами. Моделирование распространения трещины было проведено в рамках квазистатического подхода, что позволяет исключить часть алгоритма, отвечающую за решение задачи «гидродинамика–упругость». На каждом шаге распространения трещины давление в скважине, пропилах и трещине одинаково. Это существенно снижает требования к вычислительным ресурсам и позволяет использовать более подробную расчетную сетку и меньший шаг распространения трещины. С той же целью использовалась бесконечная расчетная область вместо блоков конечного размера, применяемых в экс-

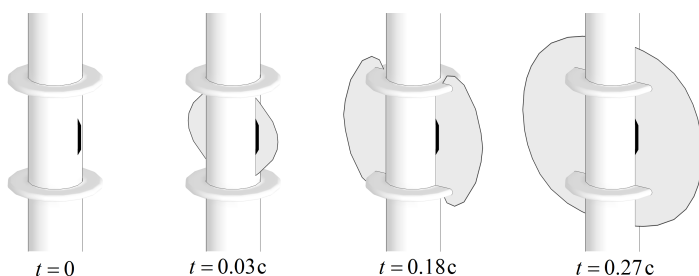


Рис. 7.6. Форма трещины в различные моменты процесса распространения.

периментальном исследовании. Следует отметить, что в экспериментах использовались блоки достаточно большого размера, чтобы такое упрощение не влияло на результаты моделирования. На рис. 7.6 показана форма трещины в различные моменты процесса распространения. Все параметры, за исключением вязкости жидкости, соответствовали эксперименту Test2 (см. § 3.3.3). Трещиностойкость материала и его прочность на разрыв были заданы равными $K_{Ic} = 1 \text{ МПа} \sqrt{\text{м}}$ и $\sigma_c = 5.2 \text{ МПа}$.

Распространяясь, трещина продвигается по поверхности скважины, «обтекая» пропилов. Для аккуратного описания процесса «обтекания» трещиной пропилов необходимо было использовать подробную расчетную сетку и маленький шаг приращения трещины. Это можно считать недостатком предлагаемой модели, затрудняющим ее применение с учетом вязкости жидкости при описании распространения трещины в сложных геометрических областях.

Использование же квазистатического подхода приводит к занижению давления из-за отсутствия учета вязких эффектов в жидкости. Так, в рассматриваемом примере давление в скважине, полученное в расчетах, составляло $p = 25\text{--}30 \text{ МПа}$, что меньше наблюдаемого в эксперименте, варьирующегося в интервале $p = 52\text{--}64 \text{ МПа}$. Наблюдаемая в расчетах скорость распространения трещины очень высока, и трещина «обтекает» пропилов менее чем за секунду. То есть влияние пропилов на распространение трещины невелико и проявляется только при инициации трещины и в первые мгновения ее распространения. Таким образом, при моделировании распространения трещин

(но не инициации!) более адекватным представляется использование динамического подхода в сочетании с упрощением геометрии области.

7.2.2. Динамическое распространение продольной трещины

В условиях радиального сжатия $\sigma_H = \sigma_h = \sigma_v = 16$ МПа среды с упругими свойствами $E = 20$ ГПа, $\nu = 0.2$, $K_{Ic} = 3$ МПа $\sqrt{м}$ рассмотрена задача распространения продольной зародышевой трещины (рис. 7.7). Зародышевая трещина имеет поперечный размер 0.2 м и продольный размер 0.5 м, радиус сква-

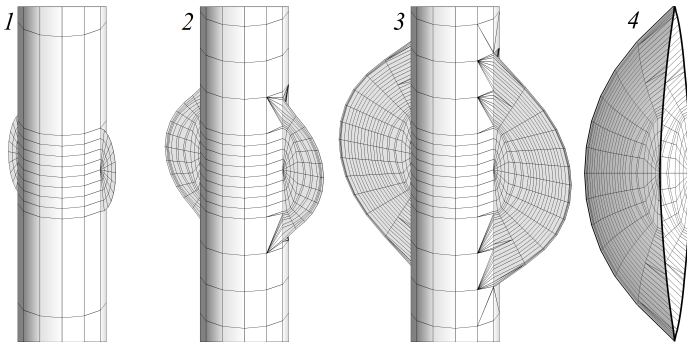


Рис. 7.7. Распространение продольной трещины: 1 – зародышевая трещина в момент $t = 0$; 2 – трещина в момент $t = 79$ с; 3 – $t = 378$ с; 4 – раскрытие левого крыла трещины в момент 3, увеличенное в 200 раз.

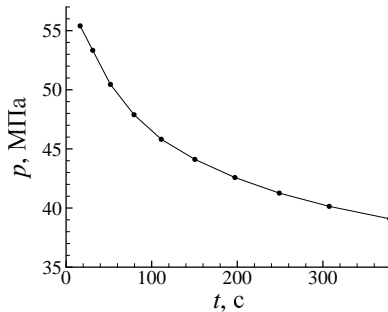


Рис. 7.8. Зависимость давления в источнике закачки от времени. Продольная трещина.

жины $R_w = 0.5$ м. Трещина распространяется под действием закачиваемой с расходом $Q_{in} = 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$ вязкой жидкости $\mu = 1000 \text{ Па} \cdot \text{с}$ в оба крыла трещины. На рис. 7.8 показаны зависимости давления в источнике закачки от времени. Время рассчитывается по формуле $t = V/Q_{in}$, где V — объем трещины.

7.3. Влияние основных параметров на распространение продольной трещины

Для демонстрации возможностей трехмерной модели распространения трещины и качественной верификации алгоритма сформулируем вспомогательную задачу и проведем анализ чувствительности криволинейной трещины к основным ее параметрам.

7.3.1. Постановка вспомогательной задачи для анализа чувствительности процесса распространения

Рассматривается скважина с продольной зародышевой трещиной, в которую с расходом $Q_{in} = 16 \text{ см}^3/\text{с}$ закачивается жидкость с вязкостью $\mu = 1000 \text{ Па} \cdot \text{с}$. Скважина находится в породе, характеризующейся параметрами $E = 20 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.2$, $K_{Ic} = 3 \text{ МПа} \sqrt{\text{м}}$. Порода сжата на бесконечности напряжениями $\sigma_h = 30 \text{ МПа}$ и $\sigma_H = 50 \text{ МПа}$, действующими в плоскости, ортогональной к скважине, и напряжением $\sigma_v = 60 \text{ МПа}$, действующим в направлении оси скважины (рис. 7.9). Радиус скважины равен $r = 0.04$ м, полуоси зародышевой трещины, имеющей эллиптическую форму, равны $a = 0.3$ м и $b = 0.1$ м. Высота скважины, равная $4a = 1.2$ м, предполагается достаточно большой, чтобы исключить влияние торцов скважины на трещину в первые шаги распространения. Предполагается, что давление в скважине одинаково во всех ее точках и рассчитывается как давление в фиктивной точке в центре скважины. Плоскость трещины предполагается ортогональной направле-

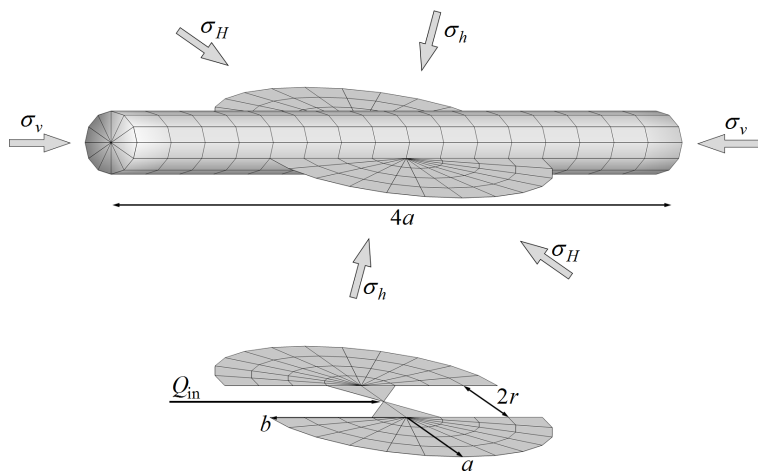


Рис. 7.9. Геометрия вспомогательной задачи: зародышевая полуэллиптическая трещина с полуосями a и b ; расчетная сетка для решения задачи о течении жидкости с фиктивной точкой источника.

нию действия напряжения σ_h за исключением раздела, посвященного влиянию угла поворота трещины.

7.3.2. Влияние вязкости жидкости

Для анализа чувствительности трещины к вязкости жидкости будем варьировать вязкость в интервале $\mu = 100 - 1000 \text{ Па} \cdot \text{с}$. На рис. 7.10 показаны зависимости давления в скважине от времени, полученные при закачке жидкости с различной вязкостью при расходе $Q_{in} = 16 \text{ см}^3 / \text{с}$. Как и следовало ожидать

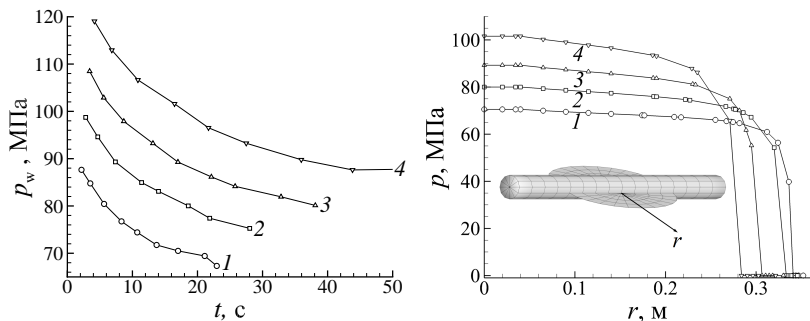


Рис. 7.10. Зависимости давления в скважине от времени (слева) распределения давления вдоль линии симметрии трещины (справа) для разных значений вязкости μ , $\text{Па} \cdot \text{с}$: 100 (1), 250 (2), 500 (3), 1000 (4).

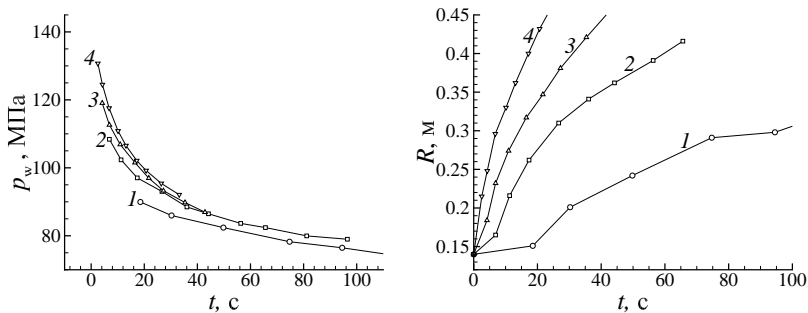


Рис. 7.11. Зависимости давления в скважине (слева) и длины трещины (справа) от времени для различных значений скорости закачки Q_{in} , cm^3/c : 2 (1), 8 (2), 16 (3), 32 (4).

(и как описано в § 5.4.2 для случая поперечной трещины), увеличение вязкости жидкости приводит к увеличению давления в скважине. Распределения давления вдоль линии симметрии трещины, ортогональной к скважине (см. рис. 7.10), показывают, что большие вязкости приводят к большему градиенту давления в окрестности фронта трещины, тогда как на остальной части трещины градиенты давления приблизительно одинаковы для всех рассмотренных значений вязкости.

7.3.3. Влияние скорости закачки

Скорость закачки (расход) жидкости варьировалась в интервале $Q_{in} = 2 - 32 \text{ cm}^3/\text{c}$. Как видно из рис. 7.11 (слева), давление слабо зависит от скорости закачки. Это наблюдение согласуется с полученными аналитически выводами, касающимися радиальной и KGD-моделей [26]. В то же время длина трещины, замеренная вдоль ортогональной к скважине линии симметрии трещины от источника закачки до фронта трещины, существенно зависит от скорости закачки (см. рис. 7.11, справа).

7.3.4. Влияние угла наклона начальной трещины

В отличие от анализа, проведенного в предыдущих параграфах, здесь начальная трещина не ортогональна направлению действия напряжений σ_h . Определим угол отклонения зародышевой трещины β как угол между нормалью к плоскости зародышевой трещины и направлением σ_h . Для демонстрации

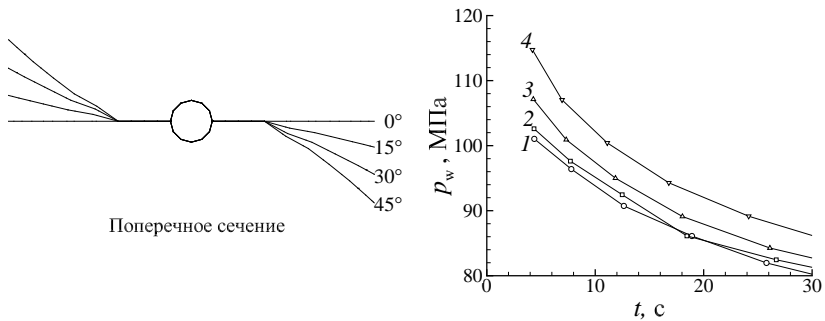


Рис. 7.12. Траектории трещины (слева) и зависимости давления в скважине от времени (справа) для различных углов отклонения β : 0° (1), 15° (2), 30° (3), 45° (4).

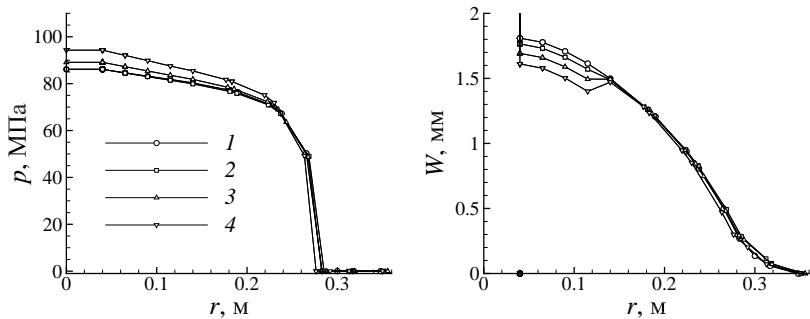


Рис. 7.13. Распределения давления (слева) и ширины трещины (справа) вдоль линии симметрии трещины, полученные при различных углах отклонения β : 0° (1), 15° (2), 30° (3), 45° (4).

возможностей модели распространения описывать искривление трещины, ее выход в предпочтительную плоскость трещины (ППТ) будем варьировать угол отклонения в интервале $\beta = 0-45^\circ$.

На рис. 7.12 (слева) показаны траектории трещин в поперечной плоскости, проходящей через центр зародышевой трещины. Прямая часть траектории соответствует сечению зародышевой трещины. Как видно из рисунка, сразу после начала распространения траектория трещины терпит излом.

Увеличение угла отклонения, как и ожидалось, приводит к увеличению давления в скважине (см. рис. 7.12, справа). Ши-

рина трещины вдоль линии симметрии уменьшается, наблюдается так называемое пережатие в области, соответствующей зародышевой трещине, плоскость которой не ортогональна направлению действия σ_h (рис. 7.13). При увеличении угла отклонения пережатие увеличивается, что влечет за собой и увеличение давления, необходимого для закачивания жидкости с требуемым расходом через узкую часть трещины.

7.4. Моделирование распространения поперечной трещины в трехмерной постановке

7.4.1. Сравнение квазистатического и динамического роста трещины

Проведено сравнение траекторий трещин и зависимостей давления в скважине от времени, полученных по моделям квази-

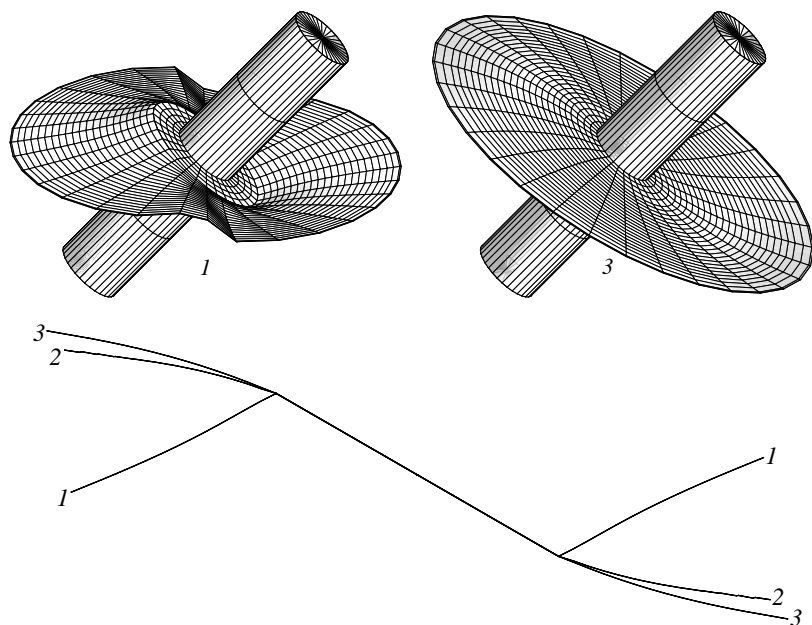


Рис. 7.14. Траектории трещин и их сечения: 1 — квазистатический подход; 2 — динамический подход с $\mu = 100 \text{ Па} \cdot \text{с}$; 3 — динамический подход с $\mu = 1000 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

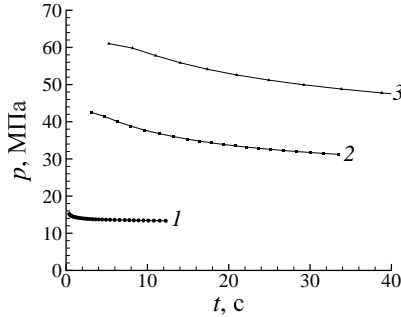


Рис. 7.15. Зависимости давления в скважине от времени: 1 — квазистатический подход; 2 — динамический подход с $\mu = 100 \text{ Па} \cdot \text{с}$; 3 — динамический подход с $\mu = 1000 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

статического и динамического роста трещины. Скважина высоты $H = 5 \text{ м}$ и радиуса $R_w = 0.5 \text{ м}$ с поперечной зародышевой трещиной радиуса $R = 1 \text{ м}$ в упругой породе с $E = 20 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.2$ и $K_{Ic} = 3 \text{ МПа} \sqrt{\text{м}}$ наклонена на угол $\alpha = 45^\circ$ относительно главных сжимающих напряжений с главными значениями тензора напряжений $\sigma_y^\infty = -12 \text{ МПа}$, $\sigma_x^\infty = \sigma_z^\infty = -16 \text{ МПа}$, как показано на рис. 4.17 (напомним, что сжимающим напряжениям соответствуют отрицательные значения). Жидкость с вязкостью μ закачивается в трещину с расходом $Q_{in} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{с}$. Трещина распространяется и пытается переориентироваться в плоскость, ортогональную σ_y^∞ .

Рассмотрено два подхода для моделирования распространения трещины. Квазистатический подход не учитывает вязкость жидкости. Динамический подход рассмотрен со значениями вязкости $\mu = 100$ и $1000 \text{ Па} \cdot \text{с}$. Трехмерные изображения форм трещин и их сечения, рассчитанные в рамках квазистатического и динамического подходов, показаны на рис. 7.14. На рис. 7.15 приведены зависимости давления в скважине от времени, полученные в каждом из подходов.

7.4.2. Влияние скважины на распространение трещины

На рис. 4.17 была представлена постановка задачи для описания квазистатического распространения трещины от круглой зародышевой трещины радиуса R , расположенной на полости скважины радиуса R_w . Зародышевая трещина перпендикуляр-

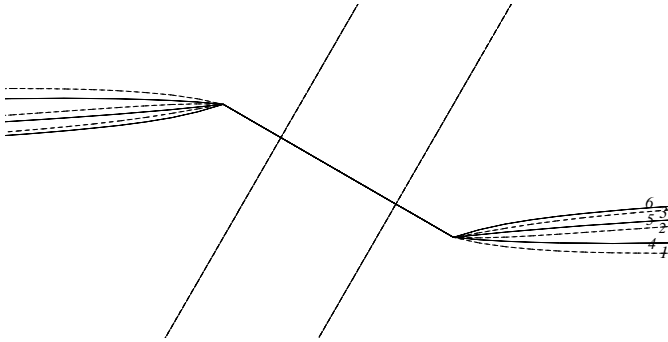


Рис. 7.16. Траектории трещины в задачах со скважиной (1 – 3) и без скважины (4 – 6): $(\sigma_x^\infty; \sigma_y^\infty; \sigma_z^\infty) = -(4; 3; 4)$ МПа (1, 4), $-(8; 6; 8)$ МПа (2, 5), $-(16; 12; 16)$ МПа (3, 6).

на оси скважины, которая в свою очередь наклонена под углом α к вертикальному направлению (ось Oy). Для оценки необходимости учета влияния скважины было проведено моделирование распространения трещины при наличии и при отсутствии скважины. Использовались следующие значения параметров: $E = 20$ ГПа, $\nu = 0.2$, $K_{Ic} = 3$ МПа $\sqrt{м}$, $R = 1$ м, $R_w = 0.5$ м, $\alpha = 30^\circ$, $\sigma_x^\infty = -16$ МПа, $\sigma_y^\infty = -12$ МПа; $\sigma_z^\infty = -16$ МПа. На рис. 7.16 приведены траектории трещины, полученные при различных значениях внешних напряжений при учете и без учета скважины. Видно, что наличие скважины влияет на траекторию трещины и скважина должна учитываться при моделировании начальной стадии распространения трещины.

7.5. Влияние основных параметров на одновременное распространение двух параллельных трещин

7.5.1. Распространение поперечной трещины от скважины с пропилами

Для анализа взаимного влияния одновременно распространяющихся трещин, которое неизбежно при проведении многостадийного ГРП, используются как экспериментальные [176], так и численные методики [214–216]. В настоящей монографии

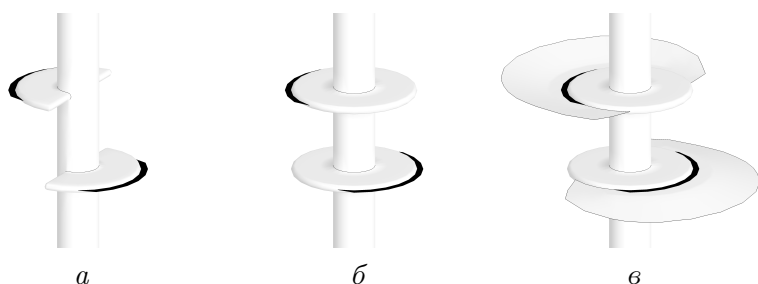


Рис. 7.17. Геометрия зародышевых трещин для эксперимента Test3: в эксперименте Test3 вместе с зародышевыми трещинами (а); упрощенная геометрия (б); трещина в момент времени $t = 0.25$ с (в).

было проведено численное моделирование двух параллельных трещин, распространяющихся от двух параллельных пропилов, которые наблюдались в экспериментах по разрушению скважины с пропилами, описанных в § 3.3.3. Как уже указывалось в § 7.2.1, в эксперименте наблюдался один из сценариев развития трещины: распространение одной продольной трещины или нескольких поперечных. В экспериментах Test3 и Test4 инициируется и распространяется от внешних ребер пропилов поперечная трещина. Так как геометрия блоков в этих экспериментах была идентична, моделирование проведено только для Test3 ($E = 20$ ГПа, $\nu = 0.2$, $\sigma_H = 20.7$ МПа, $\sigma_h = 15.5$ МПа, $\sigma_v = 24.1$ МПа, $\sigma_c = 5.2$ МПа, $K_{Ic} = 1$ МПа $\sqrt{м}$, $Q_{in} = 0.5$ см³/с, $\mu = 1000$ Па · с, глубина пропилов была равна диаметру скважины). Геометрия области в окрестности угла между полукруглым пропилом и скважиной достаточно сложна для моделирования (рис. 7.17, а), поэтому требуется чрезвычайно маленький шаг приращения трещины для детального описания ее распространения. Для преодоления этой сложности рассматривалась упрощенная геометрия расчетной области (рис. 7.17, б). Она состоит из скважины, двух круговых пропилов и двух зародышевых трещин, полученных из решения задачи инициации с оригинальной геометрией области (см. рис. 7.17, а) § 3.3.3 [35].

Зародившаяся трещина распространяется вдоль кромки пропила с высокой скоростью. За $t = 0.25$ с после начала распространения трещина огибает большую часть пропила и при-

обретает практически круговую форму (см. рис. 7.17, в), поэтому можно считать, что форма зародышевой трещины и ее положение не влияют на ее распространение, тогда как ориентация играет ключевую роль.

7.5.2. Основные параметры пропилов и их влияние на распространение трещин

Будем исследовать влияние следующих геометрических параметров пропилов на распространение трещин: расстояние между пропилами L ; глубина пропилов d_N ; ширина пропилов W_N ; угол наклона α (см. рис. 7.18). Базовым набором параметров будем считать следующие значения: $L = 5.08$ см, $d_{N1} = d_{N2} = d_N = 2.54$ см, $W_N = 0.48$ см, $\alpha = 0^\circ$, соответствующие параметрам эксперимента Test3.

Расстояние между пропилами

Расстояние между пропилами варьируется в интервале $L = 2.54$ – 10.16 см. На рис. 7.19 показаны зависимости давления в скважине от времени, формы и траектории трещин в различные моменты времени, полученные для пропилов, разнесенных на различные расстояния L .

Легко видеть, что трещины влияют друг на друга тем больше, чем ближе они расположены. Расстояние между пропилами заметно влияет на давление в скважине (до 8 % при изменении расстояния в 4 раза) на первых 10 с распространения, но

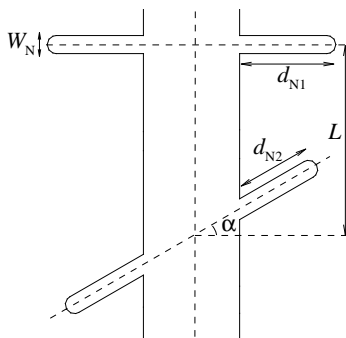


Рис. 7.18. Варьируемые геометрические параметры пропилов.

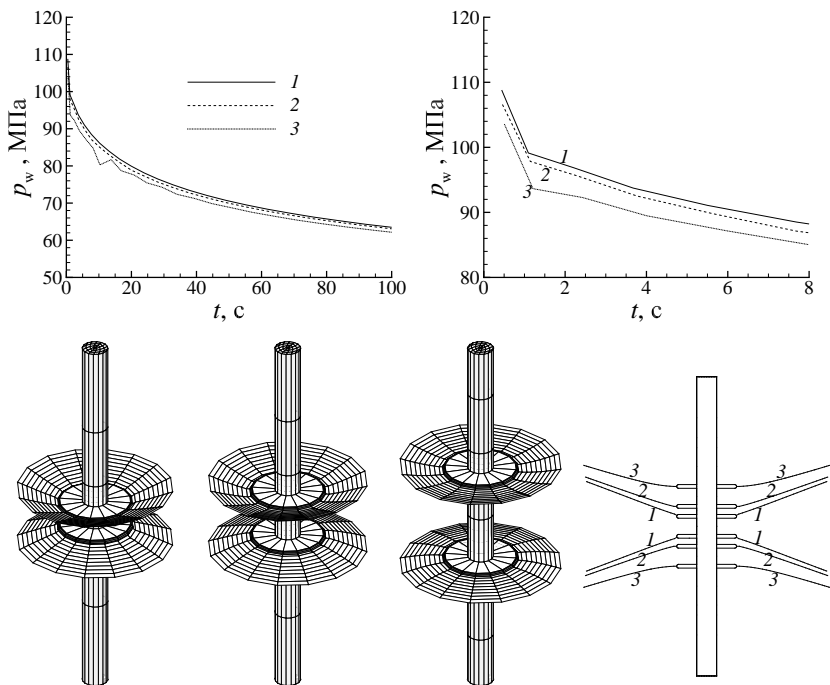


Рис. 7.19. Влияние расстояния между пропилами L на давление в скважине (вверху), форму и траектории трещин (внизу): 2.54 см (1), 5.08 см (2), 10.16 см (3).

при дальнейшем распространении влияние существенно снижается и давления становятся практически одинаковыми (различие не превосходит 2%) при всех рассмотренных значениях L .

Глубина

Глубина пропилов варьировалась в интервале $d_N = 1.27\text{--}5.08$ см. На рис. 7.20 приведены траектории трещин и зависимости давления в скважине от времени, рассчитанные при различных глубинах пропилов. Видно, что увеличение глубины пропилов слабо влияет на траектории трещин, но существенно (до 25% при увеличении в 4 раза) снижает давление в скважине.

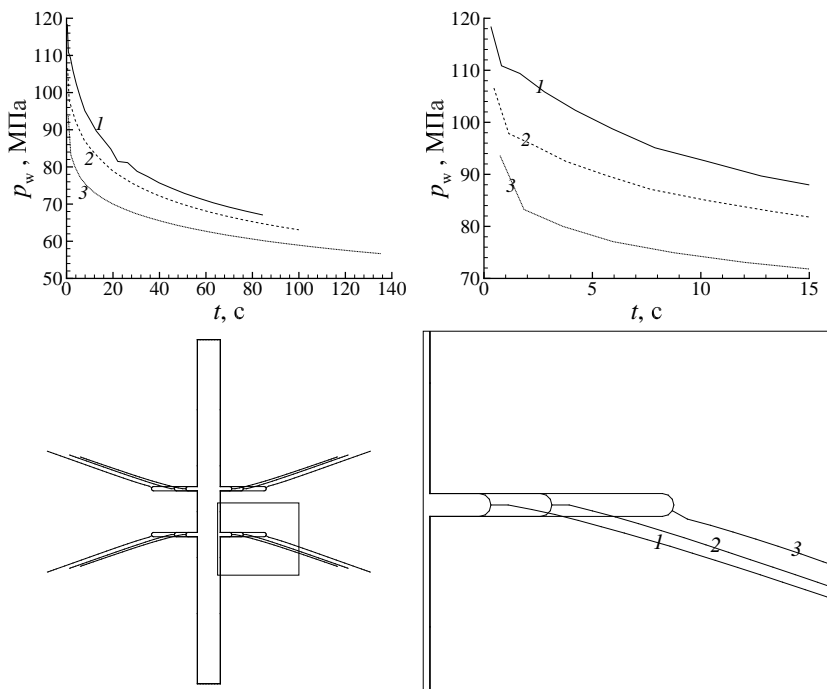


Рис. 7.20. Влияние глубины пропилов d_N на давление в скважине (вверху) и траектории трещины (внизу): 1.27 см (1), 2.54 см (2), 5.08 см (3).

Ширина

Ширина пропилов варьировалась в интервале $W_N = 0.24\text{--}0.96$ см. Этот параметр не влияет на давление и траекторию (рис. 7.21) и при проведении ГРП должен выбираться исключительно из соображений технологического удобства создания пропила.

Угол наклона

Напомним, что скважина ориентирована в направлении действия напряжения σ_v , а напряжения σ_H и σ_h действуют в плоскости, нормальной к оси скважины. Моделирование было проведено при повороте обоих пропилов вокруг оси σ_h на угол $\alpha = 0\text{--}45^\circ$.

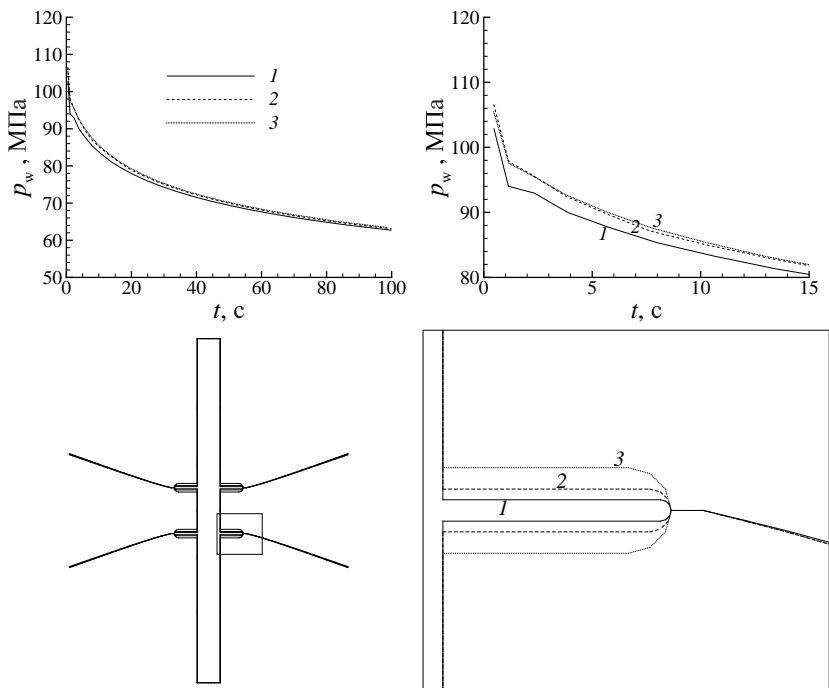


Рис. 7.21. Влияние ширины пропилов W_N на давление в скважине (вверху) и траектории трещины (внизу): 0.24 см (1), 0.48 см (2), 0.96 см (3).

Видно, что место зарождения трещин меняется при увеличении угла поворота и давление инициации достигает максимума при угле $\alpha = 20^\circ$ (рис. 7.22). Распространение моделировалось, начиная с круговых зародышевых трещин вместо показанных на рис. 7.22. Учитывая, что трещина распространяется вокруг всего пропила за время менее секунды (см. § 7.5.1), то такое упрощение не оказывает существенного влияния на процесс.

В предыдущем пункте (7.5.2) было показано, что трещины взаимодействуют тем сильнее, чем ближе они находятся, и это взаимодействие отражается на их траектории. На рис. 7.23 (справа) видно, что левая часть верхнего пропила для $\alpha = 45^\circ$ ближе к нижнему пропилу, чем его правая часть. Поэтому влияние нижнего пропила на левую часть верхнего (а соответственно, и нижней трещины на левую часть верхней) сильнее.

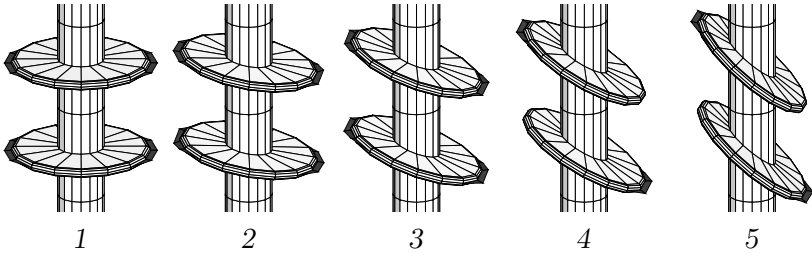


Рис. 7.22. Трещины, зародившиеся от пропилов при различных углах поворота: 1 - $\alpha = 0^\circ$, $p_{\text{init}} = 53.6$ МПа; 2 - $\alpha = 10^\circ$, $p_{\text{init}} = 55.7$ МПа; 3 - $\alpha = 20^\circ$, $p_{\text{init}} = 59.2$ МПа; 4 - $\alpha = 30^\circ$, $p_{\text{init}} = 56.9$ МПа; 5 - $\alpha = 40^\circ$, $p_{\text{init}} = 57.2$ МПа.

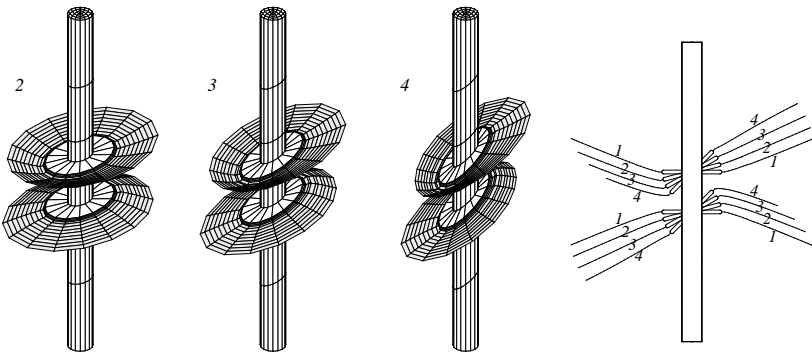
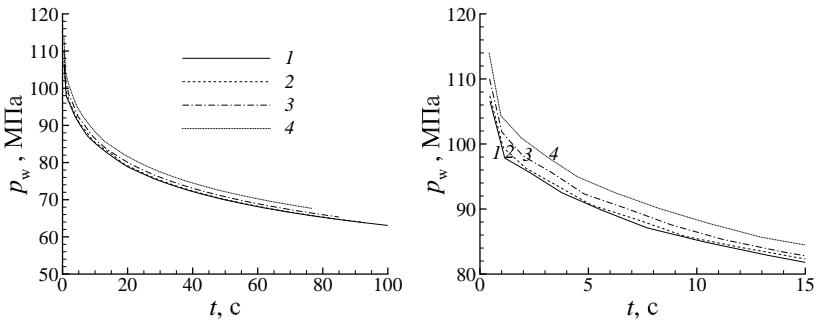


Рис. 7.23. Влияние угла наклона пропилов на давление в скважине (вверху) и траектории трещины (внизу) α , град.: 0 (1), 15 (2), 30 (3), 45 (4).

Это приводит к сильному искривлению левой части верхней трещины при почти плоской правой. В силу симметрии задачи, аналогичная ситуация наблюдается для левой и правой частей нижней трещины.

На рис. 7.23 можно увидеть еще один эффект. Так как зародышевые трещины наклонены к плоскости действия минимальных напряжений σ_v , то трещины должны поворачиваться для того, чтобы попасть в эту плоскость. Однако соседние трещины препятствуют реориентации друг друга. Это легко увидеть для правой стороны верхней трещины. Для $\alpha = 45^\circ$ трещина медленно поворачивается в горизонтальную (нормальную к σ_v) плоскость, так как соседняя трещина находится достаточно далеко и ее влияние слабо. При $\alpha = 0$ зародышевая трещина уже находится в нормальной к σ_v плоскости и не должна искривляться, но соседняя трещина в этом случае находится достаточно близко, чтобы вызвать отклонение от нормальной к σ_v плоскости.

Глава 8

Методы оптимизации в задачах распространения трещин и проектирования гидроразрыва пласта

8.1. Подходы к оптимизации процесса ГРП

Цель оптимизационного проектирования процесса ГРП заключается в максимизации нефте- или газодобычи путем увеличения объема пласта, подвергнутого разрыву. Методы оптимизации основываются на модели распространения трещины в упругой среде под действием закачки жидкости. Входными параметрами, которые могут варьироваться в процессе оптимизации, являются форма начальной полости и зародышевой трещины, давление или скорость закачиваемой жидкости (расписание закачки), ее реологические параметры, параметры породы, выходными параметрами — форма срединной поверхности трещины, распределение ширины, скорость распространения трещины. Прямая задача оптимизации заключается в расчете выходных характеристик резервуара на основе входных параметров. Решая прямую задачу, можно определить геометрию полученной трещины, объем углеводородов, которые

могут быть получены из скважины, стоимость процесса гидроразрыва и т. д. Обратная задача заключается в нахождении вектора входных параметров, обеспечивающих удовлетворение заданных критериев итоговой трещины и процесса распространения. Оптимизация процесса ГРП заключается в решении обратной задачи, в которой необходимо определить параметры реологических законов жидкости, расписание закачки (т. е. зависимости расхода жидкости от времени), условия инициации трещины (геометрию полости, ориентацию по отношению к напряжениям породы в естественном залегании), которые обеспечивают необходимое расположение зародышевой трещины, прямолинейность траектории трещины, равномерное распределение ширины трещины вдоль серединной поверхности трещины, отсутствие изломов траектории, минимальную стоимость процесса ГРП, максимальный объем добычи углеводородов.

В работе [217] проводится оптимизация процесса гидроразрыва пласта для модели РКН [3, 4]. Модель описывает прямолинейное распространение трещины, исходящее из линейного источника. Предполагается, что трещина гидроразрыва имеет постоянную высоту, значительно меньшую длины трещины. При таком допущении изменение параметров трещины вдоль ее высоты незначительно, и деформацию породы можно рассматривать в каждом вертикальном сечении изолированно как плоское деформированное состояние. В модели РКН не учитывается трещиностойкость породы. Считается, что жидкость гидроразрыва заполняет всю трещину, механика кончика трещины не рассматривается. Учитываются фильтрационные утечки жидкости в породу. Геометрия разрыва рассматривается как функция от следующих параметров, влияющих на процесс проведения гидроразрыва: вязкость жидкости гидроразрыва μ , закон закачки q_{in} , время закачки t_{in} , концентрация пропантанта P_c и длина трещины x_f . Высота трещины h_f и ее ширина w вычисляются путем решения системы уравнений, основанной на геометрии трещины и материальном балансе. Оптимизационная задача для процесса гидроразрыва заключается в максимизации общего объема производства за 10 лет при фазовых и эксплуатационных (функциональных) ограничениях. Для решения оптимизационной задачи используется алгоритм

INТЕМОВ (INTElligent Moving Object), идея которого основана на концепциях генетического алгоритма, симплекс-метода и EVOP-алгоритме (EVolutionary OPeration).

В работе [218] проводится оптимизация процесса гидроразрыва пласта с использованием псевдотрехмерной модели распространения трещины (P-3D). От модели PKN она отличается изменением варьируемых параметров вдоль высоты трещины, что влияет на ее ширину. Постановка и метод решения оптимизационной задачи такие же, как в [217]. Результаты работ [217] и [218] показывают, что предложенный способ решения поставленных оптимизационных задач играет важную роль в улучшении процесса ГРП. Понижение максимального возможного объема добытого вещества или NPV до 12 % позволяет за 10 лет снизить затраты на проведение ГРП на 44 %.

В работе [219] представлена оптимизация процесса гидроразрыва пласта для трехмерной модели. В качестве объекта исследования рассматривается крупное месторождение сланцевого газа Барнетт Шейл. Оно характеризуется семью слоями горных пород и четырьмя наборами соединений в слое породы. Целью оптимизации процесса гидроразрыва является максимизация объема породы-коллектора, что в свою очередь максимизирует объем добытого газа. Для трехмерного моделирования и анализа данных используется программный комплекс ANSYS, для моделирования процесса гидроразрыва — программа multiPlas, а для калибровки более 200 физических параметров и оптимизации добычи газа — оптимизационный инструмент optiSLang. Основным результатом моделирования — параметры трехмерной трещиноватой породы. В процессе калибровки значения физических параметров обновляются до тех пор, пока время и место измерений сейсмических разломов не покажут достаточно точное согласование с результатами моделирования. Корреляционный анализ optiSLang позволяет выявить значимость варьируемого параметра в изменении процесса гидроразрыва. Из широкого круга варьируемых параметров наиболее важными являются толщина слоя и его расположение, упругие свойства породы, гидравлические параметры, плоскость залегания сланца, расположение и частота изломов этой плоскости. Эти параметры сверяются с данными гео-

физических исследований скважин. Расширенный функционал программного пакета поддерживает введение дополнительных физических эффектов, например тепловых. Откалиброванная модель использовалась для прогноза дебита газа из скважины. Предсказанный с помощью откалиброванной модели дебит газа показал совпадение с реальным дебитом намного ближе, чем тот, который был рассчитан только с помощью данных измерений сейсмических разломов. С помощью оптимизационного проектирования добыча газа была увеличена на 25 %.

В монографии задача оптимального управления процессом гидроразрыва пласта ставится как оптимизационная задача нахождения вектора входных параметров модели распространения трещины, обеспечивающего минимизацию нескольких целевых функционалов. Рассматриваются различные целевые функционалы, построенные на выходных данных модели распространения трещины. Задача сформулирована в терминах многоцелевого многопараметрического оптимизационного метода, который основан на комбинации модели распространения трещины и генетического алгоритма. В качестве модели распространения трещины используется модель радиальной трещины, распространяющейся под действием закачки смеси жидкости Гершеля–Балкли с пропантом, которая позволяет установить связь между входными параметрами и получающейся трещиной. Возможности предлагаемого подхода к оптимизации гидроразрыва пласта продемонстрированы на примере резервуара неглубокого залегания углеводородов. Результаты показывают, что оптимизация параметров жидкости и закачки позволяет достичь максимального объема добытого углеводорода при значительном снижении затрат на проведение гидроразрыва пласта.

8.2. Прямая задача моделирования распространения трещины

Отработка методики оптимизации ГРП проводится на плоскорадиальной модели трещины, распространяющейся под действием закачки смеси жидкости Гершеля–Балкли с пропантом.

8.2.1. Плоскорadiaльная модель трещины, распространяющейся под действием закачки смеси жидкости Гершеля–Балкли с пропантом

Плоскорadiaльная модель распространения трещины, используемая для решения прямой задачи гидроразрыва при решении задачи оптимизации, основана на модели радиальной трещины, описанной в §1.2.7. Эта модель была обобщена путем добавления уравнения переноса пропанта и требует дополнительного описания. Геометрическая концепция плоскорadiaльной модели представлена на рис. 8.1. Деформация породы под действием осесимметричного распределения давления в трещине выражается интегральным соотношением

$$W(r) = \frac{8}{\pi E'} \int_r^{R_{\text{frac}}} \left(\int_0^\zeta \frac{p_{\text{net}}(\xi)\xi}{\sqrt{\zeta^2 - \xi^2} \sqrt{\zeta^2 - r^2}} d\xi \right) d\zeta,$$

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad p_{\text{net}} = p - \sigma_{\text{min}}, \quad (8.1)$$

где p есть абсолютное давление смеси, $R_{\text{frac}} = R_{\text{frac}}(t)$ есть положение фронта трещины, определяемое из известного критерия хрупкого распространения трещины

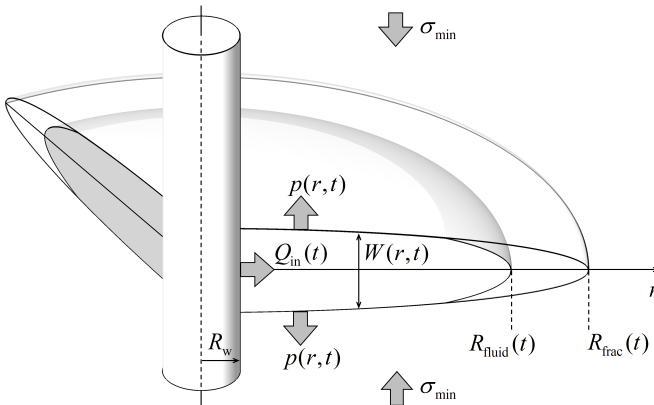


Рис. 8.1. Плоскорadiaльная модель распространения трещины.

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}R_{\text{frac}}} \int_0^{R_{\text{frac}}} \frac{p_{\text{net}}(\xi)\xi}{\sqrt{R_{\text{frac}}^2 - \xi^2}} d\xi = K_{Ic}. \quad (8.2)$$

Движение смеси в трещине описывается уравнением неразрывности фазы жидкости

$$\frac{\partial(rW\alpha)}{\partial t} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial(Q\alpha)}{\partial r} + \frac{1}{2\pi} \alpha Q_L(r, t) = 0, \quad (8.3)$$

где

$$Q = 2\pi r W u, \quad Q_L(r, t) = \frac{4\pi r C_L}{\sqrt{t - t_{\text{exp}}(r)}}, \quad (8.4)$$

уравнением неразрывности фазы пропантанта

$$\frac{\partial(rW\delta)}{\partial t} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial(Q\delta)}{\partial r} = 0 \quad (8.5)$$

и уравнением количества движения

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial r} = -2K \left(\frac{2n+1}{\pi n} \right)^n \frac{Q^n}{W^{2n+1} r^n} + \left(\frac{4n+2}{n+1} \right) \frac{\tau_0}{W}, \quad (8.6)$$

где K , n и τ_0 — параметры смеси. В рассматриваемой модели производится учет реологии жидкости Гершеля–Балкли, в которой сдвиговые напряжения τ выражаются через предельное напряжение сдвига τ_0 , коэффициент консистенции K , показатель степени n и скорость сдвига $\dot{\gamma}$ формулой

$$\tau = \tau_0 + K \dot{\gamma}^n. \quad (8.7)$$

Объемные концентрации жидкости α и пропантанта δ для всех допустимых r и t связаны соотношением

$$\alpha(r, t) + \delta(r, t) = 1. \quad (8.8)$$

Вязкость смеси жидкости с пропантантом определяется концентрацией пропантанта на основе соотношения Марона–Пирса [220]

$$K(\delta) = K(0) \left(1 - \frac{\delta}{\delta^*} \right)^{-2}, \quad (8.9)$$

в котором δ^* есть критическая концентрация пропанта. В экспериментальном исследовании, проведенном в [221], утверждается, что это соотношение может использоваться для смеси жидкости с твердыми частицами. Предельное напряжение сдвига τ_0 и показатель степени n для смеси определяются используемой жидкостью гидроразрыва.

На скважине задаются краевые условия для расхода смеси

$$Q(R_w, t) = Q_{in}(t) \quad (8.10)$$

и для одной из двух концентраций, например, – для пропанта

$$\delta(R_w, t) = \delta_{in}(t). \quad (8.11)$$

Предполагается наличие отставания фронта жидкости R_{fluid} от кончика трещины R_{frac}

$$R_{frac} - R_{fluid} > 0. \quad (8.12)$$

На фронте жидкости R_{fluid} ставятся условия Стефана

$$\frac{\partial R_{fluid}}{\partial t} = u(R_{fluid}, t) = \frac{Q(R_{fluid})}{2\pi R_{fluid} W(R_{fluid})} \quad (8.13)$$

и равенства нулю абсолютного давления p

$$p_{net}(R_{fluid}, t) = -\sigma_{min}. \quad (8.14)$$

Давление p_{net} на участке от фронта жидкости R_{fluid} до фронта трещины R_{frac} также полагается равным $-\sigma_{min}$. Из (8.3) с учетом условия (8.10) может быть получено уравнение баланса смеси в любой момент времени T

$$\int_0^T Q_{in}(t) dt = 2\pi \int_{R_w}^{R_{fluid}(T)} r W(r, T) dr + 2\pi \int_0^T \int_{R_w}^{R_{fluid}(T)} r Q_L(r, t) dr dt. \quad (8.15)$$

Задаются начальные данные

$$\begin{aligned} R_{frac}(0) &= R_0, & R_{fluid}(0) &= R_0, \\ W(r, 0) &= 0, & R_w &\leq r \leq R_0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

8.2.2. Законы закачки смеси и пропантанта

Закон закачки смеси $Q_{in}(t)$

Для вариации закона закачки смеси $Q_{in}(t)$ на временном интервале от 0 до T будем использовать его приближенное представление в виде полинома второго порядка

$$Q_{in}(t) = at^2 + bt + c, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.17)$$

коэффициенты которого определяются из условий

$$Q_{in}(0) = Q_{in}^0, \quad Q_{in}(T) = Q_{in}^T, \quad \int_0^T Q_{in}(t) dt = Q_{in}^* T \quad (8.18)$$

и представляются в виде

$$a = (-6Q_{in}^* + 3Q_{in}^T + 3Q_{in}^0) / T^2, \\ b = (6Q_{in}^* - 2Q_{in}^T - 4Q_{in}^0) / T, \quad c = Q_{in}^0. \quad (8.19)$$

Параметр Q_{in}^* в (8.18) определяет суммарный объем закачиваемой смеси за весь интервал времени $Q_{in}(t)$ и задается как неизменяемый параметр. Параметры Q_{in}^0 и Q_{in}^T являются первыми двумя компонентами вектора оптимизационных параметров \mathbf{x} : x_1 и x_2 соответственно. На рис. 8.2 показаны два закона закачки для $T = 300$ с: $Q_{in}(t) = Q_{in}^*$ с $Q_{in}^* = 0.1 \text{ м}^3/\text{с}$ и

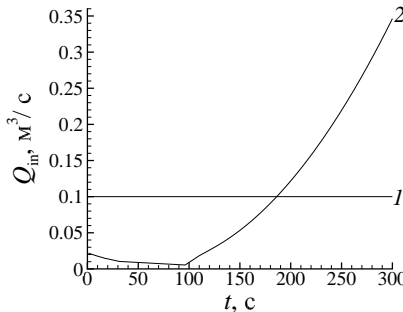


Рис. 8.2. Законы закачки для $T = 300$ с: $Q_{in}(t) = 0.1 \text{ м}^3/\text{с}$ (1); (8.17), (8.18) с $Q_{in}^0 = 0.022 \text{ м}^3/\text{с}$ и $Q_{in}^T = 0.350 \text{ м}^3/\text{с}$, полученные при решении 8.5.1 (2).

(8.17), (8.18) с $Q_{in}^0 = 0.022 \text{ м}^3/\text{с}$ и $Q_{in}^T = 0.35 \text{ м}^3/\text{с}$, полученные из решения задачи 8.5.2 с ограничениями $0.02 \leq x_1 \leq 0.1$, $0.1 \leq x_1 \leq 0.5$.

Закон закачки пропанта $\delta_{in}(t)$

Концентрация $\delta_{in}(t)$ закачиваемого пропанта в течение начальной фазы ГРП от 0 до T_p ($0 < T_p < T$) равна нулю. На временном интервале от T_p до T мы используем представление закона концентрации в виде полинома второй степени

$$\delta_{in}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq T_p, \\ a_p(t - T_p)^2 + b_p(t - T_p) + c_p, & T_p \leq t \leq T, \end{cases} \quad (8.20)$$

коэффициенты которого находятся из условий

$$\delta_{in}(T_p) = \delta_{in}^0, \quad \delta_{in}(T) = \delta_{in}^T, \quad \int_{T_p}^T \delta_{in}(t) dt = \delta_{in}^*(T - T_p) \quad (8.21)$$

и представляются в виде

$$\begin{aligned} a_p &= (-6\delta_{in}^* + 3\delta_{in}^T + 3\delta_{in}^0) / (T - T_p)^2, \\ b_p &= (6\delta_{in}^* - 2\delta_{in}^T - 4\delta_{in}^0) / (T - T_p), \quad c_p = \delta_{in}^0. \end{aligned} \quad (8.22)$$

На рис. 8.3 представлены характерные профили закона закачки пропанта $\delta_{in}(t)$ и соответствующие им распределения ширины трещины, осевшей на пропант.

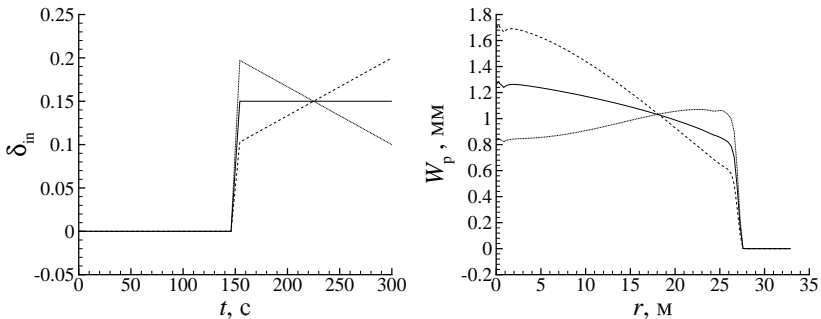


Рис. 8.3. Законы закачки пропанта (слева) и соответствующие им распределения ширин трещин $W_p(r)$ (справа), параметры закона закачки ($\delta_{in}^0, \delta_{in}^*, \delta_{in}^T$)[%]: (15, 15, 15) (сплошные); (10, 15, 20) (штриховые); (20, 15, 10) (пунктирные).

8.2.3. Решение прямой задачи

Процесс гидроразрыва длится T секунд. На рис. 8.4 представлена схема численного решения входящих в модель подзадач. Пусть на временном шаге n трещина с фронтом R_{frac}^n построена. Фронт трещины на шаге $n + 1$ определяется приращением к фронту R_{frac}^n фиксированной для всей задачи величины ΔR_{frac} . Задается положение фронта жидкости $R_{\text{fluid}}^{n+1} < R_{\text{frac}}^{n+1}$. Для заданного положения фронта жидкости численно решаются уравнения (8.1), (8.2), (8.3), (8.4), (8.5), (8.6), (8.10), (8.11), (8.13) задачи «гидродинамика–упругость». После уста-

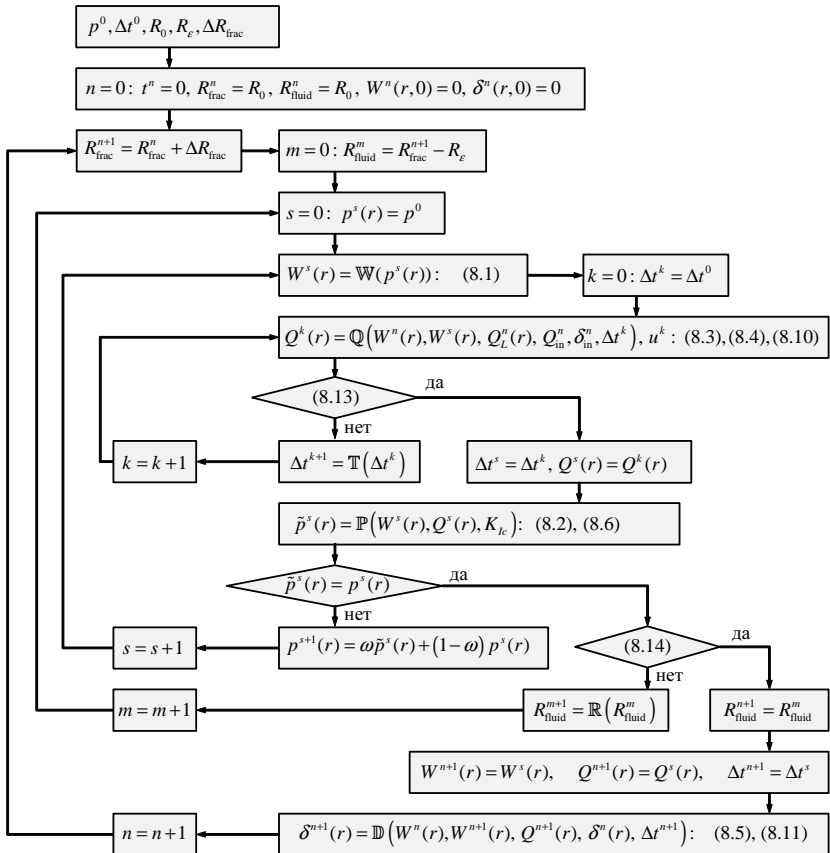


Рис. 8.4. Схема решения прямой задачи (\mathbb{T} , \mathbb{R} – операторы для (8.13) и (8.14), разрешаемые итерационно).

новления распределения давления p_{net} проверяется выполнение условия (8.14). При невыполнении этого условия положение фронта жидкости корректируется и снова решается задача «гидродинамика–упругость». Процесс продолжается до тех пор, пока давление на фронте жидкости не достигнет значения $-\sigma_{\text{min}}$. Следует отметить, что время, затраченное на распространение на заданную величину ΔR_{frac} , определяется из решения уравнения (8.13).

8.2.4. Модель продуктивности пласта

Основная цель ГРП заключается в повышении продуктивности скважины путем создания высокопроводимой структуры (трещины) в пласте. Одним из целевых функционалов, который максимизируется в монографии, является индекс продуктивности ИП J в линейном соотношении между дебитом скважины Q_{oil} и перепадом давления Δp [222]

$$Q_{\text{oil}} = J \Delta p. \quad (8.23)$$

Для определения ИП решается задача о нестационарной фильтрации нефти в пласте к трещине и по трещине к скважине, схема которой представлена на рис. 8.5.

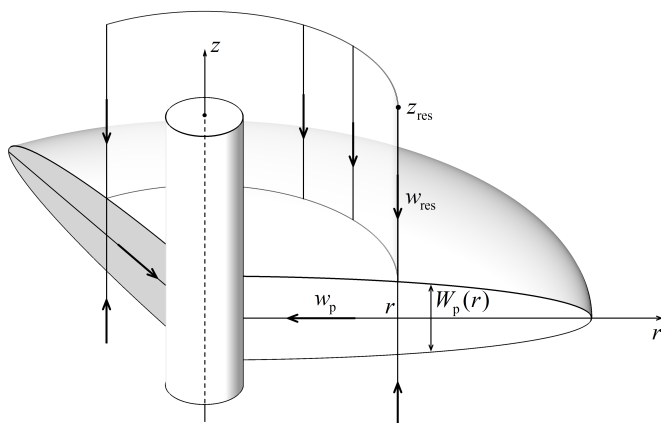


Рис. 8.5. Схема нестационарной фильтрации нефти в резервуаре и трещине.

Модели, используемые для описания фильтрации жидкости в породе и в трещине, различаются, поэтому рассмотрим их по отдельности.

Фильтрация жидкости в трещине, заполненной пропантом

Процесс нестационарной фильтрации нефти в плоскорадиальной трещине с берегами, осевшими в момент времени t_p на пропант, и имеющей после этого распределение раскрытия

$$W_p(r) = \delta(r, t_p)W(r, t_p), \quad (8.24)$$

описывается уравнением пьезопроводности

$$\frac{\partial p_p}{\partial t} - \frac{k_p}{\beta^* W_p \mu r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r W_p \frac{\partial p_p}{\partial r} \right) + \frac{2w_{\text{res}}}{\beta^* W_p} = 0 \quad (8.25)$$

и уравнением закона Дарси

$$w_p = -\frac{k_p}{\mu} \frac{\partial p_p}{\partial r}. \quad (8.26)$$

В (8.25), (8.26) $p_p(r, t)$ — давление в трещине; k_p — проницаемость трещины; w_p — скорость фильтрационного потока в трещине; w_{res} — скорость фильтрации нефти, поступающей из пласта в трещину; упругоємкость β^* определяется по формуле

$$\beta^* = m_p(\beta_{\text{oil}} + \beta_p), \quad (8.27)$$

в которой m_p — пористость трещины, β_{oil} и β_p — коэффициенты сжимаемости нефти и пропанта соответственно. Предполагается, что нефть является ньютоновской жидкостью с коэффициентом динамической вязкости μ .

На скважине ставится условие

$$2\pi R_w \frac{k_p}{\mu} \frac{\partial p_p}{\partial r} \Big|_{r=R_w} = Q_{\text{oil}}(t), \quad (8.28)$$

а на фронте трещины

$$p_p(R_{\text{frac}}, t) = 0, \quad (8.29)$$

где $Q_{\text{oil}}(t)$ — дебит скважины. Начальное условие для (8.25) задается как

$$p_p(r, 0) = 0, \quad R_w \leq r \leq R_{\text{frac}}. \quad (8.30)$$

Фильтрация нефти из пласта в трещину

Процесс нестационарной фильтрации нефти из пласта в трещину описывается уравнением пьезопроводности

$$\frac{\partial p_{\text{res}}}{\partial t} - \frac{k_{\text{res}}}{\beta^{**} \mu} \frac{\partial^2 p_{\text{res}}}{\partial z^2} = 0 \quad (8.31)$$

и уравнением закона Дарси

$$w_{\text{res}} = - \frac{k_{\text{res}}}{\mu} \frac{\partial p_{\text{res}}}{\partial z}. \quad (8.32)$$

В (8.31), (8.32) $p_{\text{res}}(r, z, t)$ — давление в пласте на цилиндрической поверхности радиуса r (см. рис. 8.5); k_{res} — проницаемость пласта; w_{res} — скорость фильтрационного потока нефти вдоль образующей цилиндрической поверхности; упругоэластичность β^{**} определяется по формуле

$$\beta^{**} = m_{\text{res}}(\beta_{\text{oil}} + \beta_{\text{res}}), \quad (8.33)$$

в которой m_{res} — пористость пласта, β_{res} — коэффициент сжимаемости пласта.

На расстоянии z_{res} от трещины ставится условие

$$p_{\text{res}}(r, z_{\text{res}}, t) = 0, \quad (8.34)$$

а на самой трещине

$$p_{\text{res}}(r, 0, t) = p_{\text{p}}(r, t). \quad (8.35)$$

Начальное условие для (8.31) задается как

$$p_{\text{res}}(r, z, 0) = 0, \quad 0 \leq z \leq z_{\text{res}}. \quad (8.36)$$

8.3. Результаты решения прямой задачи

Далее в расчетах, если не оговорено отдельно, параметры модели гидроразрыва полагаются равными значениям, приведенным в табл. 8.1.

Для демонстрации поведения модели без механизма фильтрации решена задача о распространении трещины при различных значениях коэффициента утечки жидкости C_L (рис. 8.6).

Таблица 8.1. Значения параметров модели гидроразрыва

Параметр	Обозначение	Значение	Единица измерения
Модуль Юнга	E	20	ГПа
Коэффициент Пуассона	ν	0.2	–
Напряжение в естественном залегании	σ_{\min}	10	МПа
Трещиностойкость	K_{Ic}	1	МПа $\cdot\sqrt{м}$
Коэффициент консистенции	K	1	Па $\cdot c^n$
Показатель степени	n	1	–
Предельное напряжение сдвига	τ	0	МПа
Коэффициент утечек Картера	C_L	10^{-4}	м/ \sqrt{c}
Радиус скважины	R_w	0.1	м
Время закачки	T	300	с
Время начала закачки пропанта	T_p	150	с
Средний расход смеси	Q_{in}^*	0.1	м ³ /с
Средняя концентрация пропанта	δ_{in}^*	0.5	–

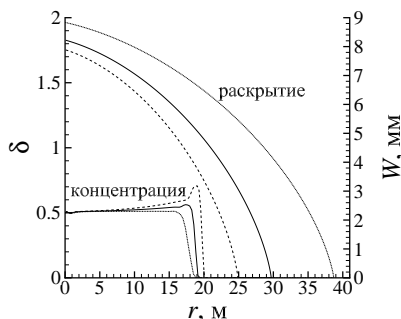


Рис. 8.6. Влияние утечки жидкости гидроразрыва на раскрытие трещины и концентрацию пропанта ($t = 0.75T$): $C_L = 0$ (пунктирные); $C_L = 10^{-4}$ м/ $c^{1/2}$ (сплошные); $C_L = 2 \cdot 10^{-4}$ м/ $c^{1/2}$ (штриховые).

Отсутствие утечки приводит к наибольшей длине распространения трещины за одно и то же время. Рост утечки вызывает уменьшение длины распространения трещины, не оказывая влияния на расстояние проникновения пропанта. Поэтому

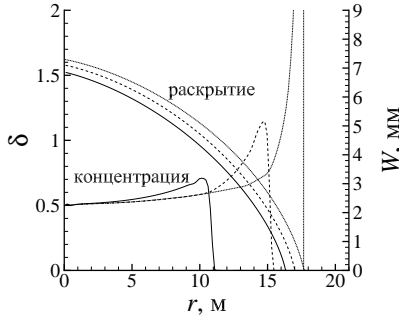


Рис. 8.7. Закупоривание трещины при $C_L = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^{1/2}$; $t = 0.58T$ (сплошные); $t = 0.64T$ (штриховые); $t = 0.68T$ (пунктирные).

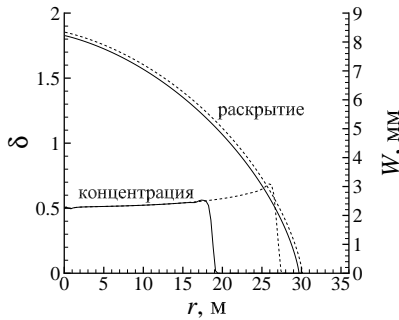


Рис. 8.8. Влияние времени начала закачки пропанта T_0 на раскрытие трещины и концентрацию пропанта ($t = 0.75T$): $T_0 = 0.3T$ (штриховые); $T_0 = 0.5T$ (сплошные).

му с ростом утечки пропант достигает кончика трещины и его концентрация в этом месте резко возрастает. При этом, согласно закону Марона–Пирса (8.9), возрастает и вязкость смеси. Это приводит к остановке роста трещины и сильному повышению давления в скважине (рис. 8.7).

Изучено влияние на процесс распространения трещины времени начала закачки пропанта T_0 (рис. 8.7). Пропант даже с такой значительной концентрацией слабо влияет как на скорость распространения трещины, так и на давление в скважине. Но когда пропант достигает кончика трещины (см. рис. 8.7), происходит ее закупорка и распространение останавливается. Пропант достигает кончика трещины тем быстрее, чем раньше начинается его закачка (рис. 8.3, 8.8).

8.4. Обратная задача ГРП

8.4.1. Постановка задачи

Переменные

Параметры плоскорадиальной трещины. Вектор оптимизационных параметров \mathbf{x} (которые независимо варьируются при поиске оптимального ГРП) включает в себя расход закачиваемой жидкости $Q_{\text{in}}(t)$, объемную концентрацию проппанта в закачиваемой смеси $\delta_{\text{in}}(t)$, параметры реологии жидкости K, n, τ_0 , модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν породы, коэффициент утечек в законе Картера

$$\mathbf{x} = (Q_{\text{in}}(t), K, n, \delta_{\text{in}}(t), \tau_0, E, \nu, C_L). \quad (8.37)$$

Параметры модели продуктивности пласта. Вектор параметров \mathbf{y} включает в себя дебит скважины $Q_{\text{oil}}(t)$, вязкость нефти μ , проницаемости трещины k_p и пласта k_{res} , пористости трещины m_p и пласта m_{res} , коэффициенты сжимаемости проппанта β_p , нефти β_{oil} и пласта β_{res} . Таким образом

$$\mathbf{y} = (Q_{\text{oil}}(t), \mu, k_p, k_{\text{res}}, m_p, m_{\text{res}}, \beta_p, \beta_{\text{oil}}, \beta_{\text{res}}). \quad (8.38)$$

Ограничения

Фазовые ограничения. Оптимизационные параметры варьируются внутри заданных интервалов:

$$\begin{aligned} x_i^l &\leq x_i \leq x_i^u, & i &= 1, \dots, N; \\ y_j^l &\leq y_j \leq y_j^u, & j &= 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Функциональные ограничения. Функциональные ограничения задаются для предотвращения неконтролируемого роста трещины, инициации вторичных трещин, чрезмерной потери жидкости, для обеспечения выполнимости технологических ограничений «в полях», накладываемых оборудованием на поверхности и внутри скважины, для обеспечения адекватной ширины трещины, эффективности жидкости и желаемых геометрических пропорций трещины. Функциональные ограничения задаются в виде неравенств

$$\phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0, \quad k = 1, \dots, K. \quad (8.40)$$

Например, для ограничения снизу минимального расхода закачки жидкости в трещину в (8.40) задается функция

$$\phi_1(\mathbf{x}) = Q_{\text{in}}^{\min} - \min_t Q_{\text{in}}(t). \quad (8.41)$$

Целевые функционалы

Целью проведения гидроразрыва пласта является увеличение его продуктивности, поэтому вполне естественно при оптимизации максимизировать суммарную добычу за период времени T_{prod} лет путем минимизации главного целевого функционала

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \int_0^{T_{\text{prod}}} Q_{\text{oil}}(t) dt. \quad (8.42)$$

Для построения функционала (8.42) должны решаться все сформулированные выше задачи: распространение трещины за время T под действием закачанной в нее смеси жидкости гидроразрыва и проппанта; нестационарной фильтрации нефти в пласте к трещине, осевшей на проппант, и по трещине к скважине в период времени $0 \leq t \leq T_{\text{prod}}$. Это достаточно сложно даже в рассмотренной одномерной постановке. Поэтому применяются упрощения. Так, в [217, 218] вместо численного решения задачи фильтрации используются ее приближенные аналитические решения для переходного периода [223, 224] псевдостационарного режима фильтрации [225], полученные в предположении постоянного давления в скважине и использующие эмпирические зависимости связи расхода и градиента давления в прискважинной зоне. На практике часто используются еще более простые формулировки.

Одна из таких формулировок обосновывается в [226]. В ней рассматривается задача фильтрации жидкости из пласта в продольную трещину, высота которой совпадает с высотой пласта H , а длина трещины $R_{\text{гас},p}$ совпадает с горизонтальным размером пласта (рис. 8.9). Фильтрация в пласте считается одномерной в направлении, перпендикулярном к плоскости трещины. По трещине происходит одномерная фильтрация к скважине. Полученное в [226] решение задачи можно условно представить

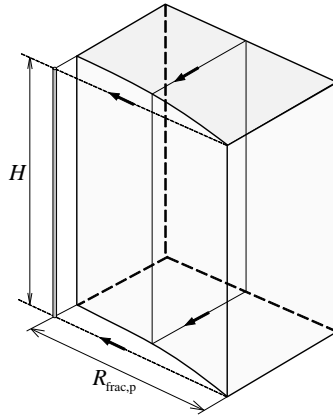


Рис. 8.9. Схема фильтрации жидкости из пласта в трещину и из трещины в скважину [226].

в виде параметрической зависимости безразмерного коэффициента продуктивности J_D от безразмерной проводимости трещины C_{fD}

$$J_D = \mathbb{J}(C_{fD}, N_p). \quad (8.43)$$

В (8.43) безразмерный коэффициент продуктивности J_D определяется через ИП J как

$$J_D = \frac{\mu}{2\pi k_{\text{res}} H} J; \quad (8.44)$$

безразмерная проводимость трещины C_{fD} есть

$$C_{fD} = \frac{k_p W_p}{k_{\text{res}} R_{\text{frac,p}}}; \quad (8.45)$$

параметром решения является количество проппанта N_p

$$N_p = \frac{2k_p V_{2W,p}}{k_{\text{res}} V_{\text{res}}}, \quad (8.46)$$

где W_p — средняя ширина, а $R_{\text{frac,p}}$ — длина осевшей на проппант трещины; $V_{2W,p}$ — объем проппанта в обоих крыльях трещины; V_{res} — объем резервуара.

Проницаемость проппанта k_p можно считать как проницаемость идеального грунта, состоящего из шариков [227]:

$$k_p = \frac{m^3 D^2}{36c(1 - m^2)}, \quad (8.47)$$

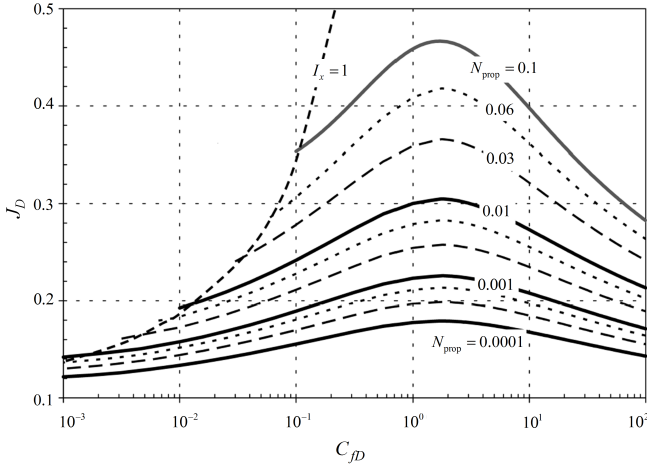


Рис. 8.10. Параметрическая зависимость безразмерного коэффициента продуктивности J_D от безразмерной проводимости трещины C_{fD} . Взято из [222].

где D — диаметр шариков проппанта, $c \approx 5$ — число Кармана, $0.259 \leq m \leq 0.476$ — пористость упаковки проппанта, которая зависит от расположения шариков. Плотной упаковке проппанта отвечает $m = 0.476$.

В [222, 226] делается вывод, что наибольшее значение безразмерного коэффициента продуктивности получается при $C_{fD} = 1.6$ (рис. 8.10).

В [228] установлено, что максимум J для продольной трещины соответствует максимуму J для поперечной трещины, подобной рассматриваемой нами плоскорадиальной трещине. В дополнение к сказанному в терминах продуктивности скважины в нашем случае оптимальной осевшей на проппант трещиной является та, для которой выполняется соотношение

$$\frac{k_p W_p(R_w)}{k_{res} R_{frac,p}} = 1.6. \quad (8.48)$$

Тогда максимизация суммарной добычи за время T_{prod} может осуществляться через минимизацию функционала

$$F_2(\mathbf{x}) = \left| \frac{k_p W_p(R_w)}{k_{res} R_{frac,p}} - 1.6 \right|, \quad (8.49)$$

для построения которого необходимо решить только задачу распространения трещины за время T под действием закачанной в нее смеси жидкости гидроразрыва и пропантанта.

Поскольку стоимость проведения ГРП достаточно высока, ее также следует учитывать при проектировании. Один из способов снижения стоимости — увеличение эффективности жидкости, т. е. отношения объема трещины к объему закачанной в нее жидкости. Увеличению этого отношения соответствует минимизация объема суммарных утечек в породу, которая достигается использованием функционала

$$F_3(\mathbf{x}) = \int_0^T \int_{R_w}^{R_{\text{fluid}}(t)} Q_L(r, t) dr dt. \quad (8.50)$$

Для слабопроницаемых пластов с малым значением k_{res} в (8.48), таких как сланцы, актуально создание трещин большого радиуса. Задача максимизации радиуса трещины может быть переформулирована в виде задачи минимизации ее ширины после окончания закачки

$$F_4(\mathbf{x}) = W(R_w, T), \quad (8.51)$$

а задача максимизации средней скорости прироста радиуса — как задача минимизации усредненной по времени ширины трещины

$$F_5(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T W(R_w, t) dt. \quad (8.52)$$

Данные функционалы были рассмотрены для демонстрации возможностей метода многоцелевой оптимизации ГРП.

Еще один функционал строится в монографии на основе предположения о том, что максимальную продуктивность будет обеспечивать трещина, раскрытие которой после оседания берегов на пропант будет постоянным вдоль трещины. Для построения такого функционала рассчитывается объем закачанного пропантанта

$$V_p = \int_0^T Q_{\text{in}}(t) \delta_{\text{in}}(t) dt \quad (8.53)$$

и полагается, что весь пропант равномерно по высоте распределен в трещине вдоль r от радиуса скважины R_w до радиуса фронта пропанта $R_{\text{frac,p}}$. То есть идеальная по проводимости трещина будет иметь постоянное раскрытие

$$W_p^* = \frac{V_p}{\pi(R_{\text{frac,p}}^2 - R_w^2)}. \quad (8.54)$$

К ней устремляем проектируемую трещину, минимизируя функционал

$$F_6(\mathbf{x}) = \int_{R_w}^{R_{\text{frac,p}}} |W_p(r) - W_p^*| dr. \quad (8.55)$$

Общая математическая постановка

Надо найти вектор параметров

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{X}, \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_L) \in \mathbf{Y}, \quad (8.56)$$

обеспечивающий минимумы функционалам

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{y} \in \mathbf{Y}} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{y} \in \mathbf{Y}} F_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (8.57)$$

при наличии фазовых (8.39) и функциональных (8.40) ограничений. В (8.57) нумерация функционалов никак не связана с нумерацией определенных выше конкретных функционалов. Предполагается, что рассматривается $M \geq 1$ абстрактных функционалов.

8.4.2. Метод решения

Так как в общем случае невозможно найти вектор \mathbf{x} , минимизирующий два и более функционала одновременно, решением задачи является фронт Парето. В работах [217, 218] построение такого фронта производится путем решения серии задач одноцелевой оптимизации с фиксацией значения одного из функционалов через функциональные ограничения. Используемая в настоящей работе методика позволяет строить фронт Парето непосредственно. В случае многоцелевой оптимизации

фронт Парето позволяет выбирать компромисс между многими критериями качества. Оптимизационная задача (8.56), (8.57), (8.39), (8.40) решалась генетическим алгоритмом, который использовался ранее авторами для многоцелевой оптимизации гидротурбин [229].

8.5. Результаты решения обратной задачи

8.5.1. Вариация закона закачки смеси

Одноцелевая оптимизация

Отыскивается вектор

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (Q_{\text{in}}^0, Q_{\text{in}}^T), \quad (8.58)$$

дающий минимум функционалу

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} F_3(\mathbf{x}) \quad (8.59)$$

при фазовых

$$0.02 \leq x_1 \leq 0.1, \quad 0.1 \leq x_2 \leq 0.5 \quad (8.60)$$

и функциональном

$$\phi_1(\mathbf{x}) = 0.002 - \min_t Q_{\text{in}}(t) \leq 0 \quad (8.61)$$

ограничениях. Значения остальных параметров приведены в табл. 8.1.

Решением задачи является вектор

$$\mathbf{x} = (0.022, 0.35), \quad (8.62)$$

дающий минимальное значение F_3 , равное 9.5 м^3 , которому соответствует закон закачки смеси, приведенный на рис. 8.2 под номером 2. Использование вместо двух параметров (8.58) четырех

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (Q_{\text{in}}^0, Q_{\text{in}}^T, K, n) \quad (8.63)$$

с фазовыми ограничениями

$$0.02 \leq x_1 \leq 0.1, \quad 0.1 \leq x_2 \leq 0.5, \quad 0.5 \leq x_3 \leq 2, \quad 0.8 \leq x_4 \leq 1 \quad (8.64)$$

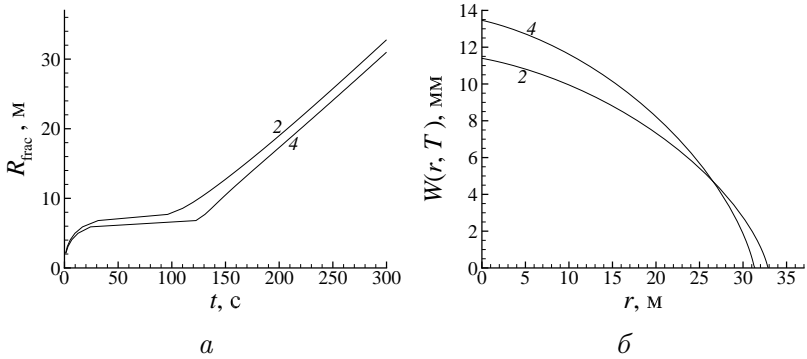


Рис. 8.11. Распределения $R_{\text{frac}}(t)$ (а), $W(r, T)$ (б), полученные при решении прямой задачи для решения оптимизационной задачи минимизации функционала F_3 в двухпараметрической (2) и четырехпараметрической (4) постановках.

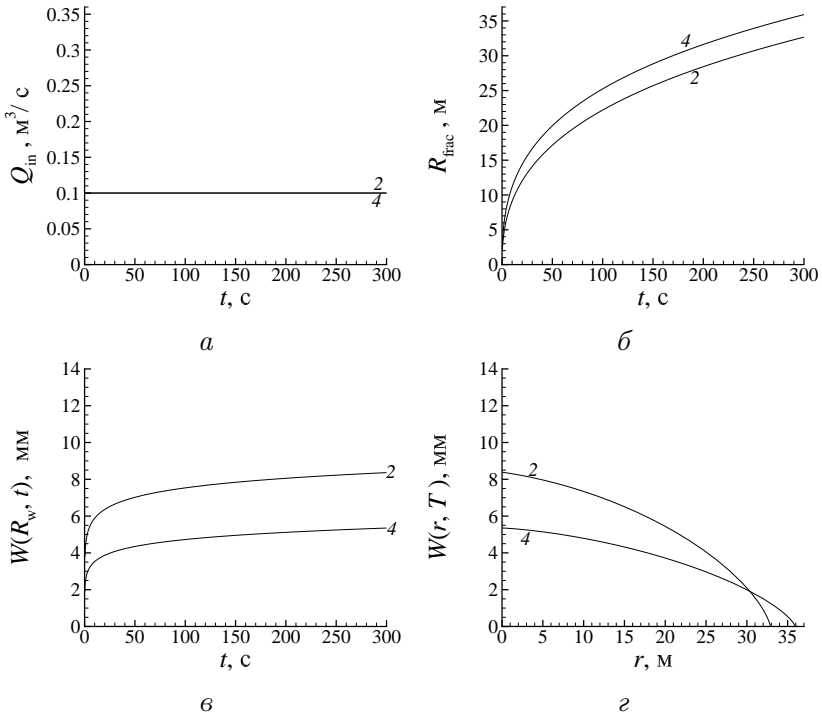


Рис. 8.12. Распределения $Q_{\text{in}}(t)$ (а), $R_{\text{frac}}(t)$ (б), $W(R_w, t)$ (в), $W(r, T)$ (г), полученные при решении прямой задачи для решения оптимизационной задачи минимизации функционала F_4 в двухпараметрической (2) и четырехпараметрической (4) постановках.

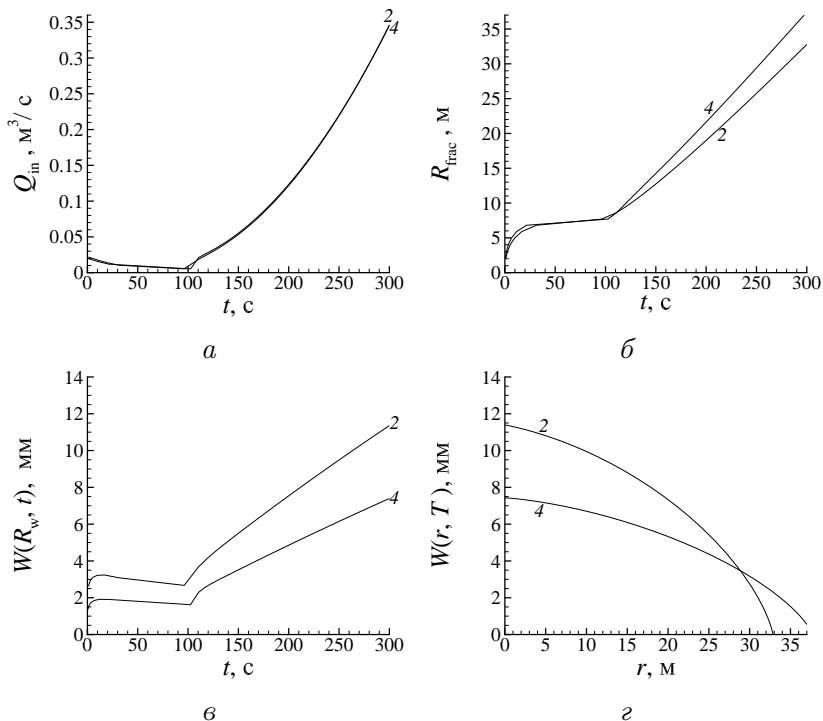


Рис. 8.13. Распределения $Q_{in}(t)$ (а), $R_{frac}(t)$ (б), $W(R_w, t)$ (в), $W(r, T)$ (г), полученные при решении прямой задачи для решения оптимизационной задачи минимизации функционала F_5 в двухпараметрической (2) и четырехпараметрической (4) постановках.

приводит к лучшему минимальному значению F_3 , равному 8.4 м^3 при решении

$$\mathbf{x} = (0.022, 0.36, 2, 1). \quad (8.65)$$

При этом закон закачки практически не изменился. Незначительно различаются также в решениях двух- и четырехпараметрических задач зависимости $R_{frac}(t)$ и $W(r, T)$ (приведенные на рис. 8.11).

Если вместо минимизации F_3 в (8.59) минимизировать F_4

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} F_4(\mathbf{x}) \quad (8.66)$$

при тех же самых ограничениях, то двухпараметрическая постановка даст $\mathbf{x} = (0.1, 0.1)$ с минимальным значением F_4 , равным 8.4 мм , а четырехпараметрическая – $\mathbf{x} = (0.1, 0.1, 0.5, 0.8)$

с минимальным значением F_4 , равным 5.4 мм. Зависимости решений прямой задачи при этих векторах \mathbf{x} приведены на рис. 8.12. Наконец, решением задачи минимизации F_5 являются векторы $\mathbf{x} = (0.022, 0.35)$ и $\mathbf{x} = (0.02, 0.348, 0.53, 0.81)$. В первом случае достигается минимум 6.1 мм, а во втором – 3.9 мм. Соответствующие зависимости решений прямой задачи для этих \mathbf{x} приведены на рис. 8.13.

8.5.2. Двухцелевая оптимизация

Отыщем теперь вектор (8.58), дающий минимум функционалам

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} F_3(\mathbf{x}), \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} F_4(\mathbf{x}) \quad (8.67)$$

при фазовых (8.60) и функциональном (8.61) ограничениях. Решением задачи является фронт Парето (рис. 8.14), на котором также указаны его предельные точки 1 и 2. Этим точкам соответствуют векторы $\mathbf{x}^1 = (0.1, 0.1)$ и $\mathbf{x}^2 = (0.022, 0.35)$. На рис. 8.15 приведены решения прямой задачи, отвечающие этим векторам.

Использование вместо двух параметров (8.58) четырех (8.63) с фазовыми ограничениями (8.64) дает фронт Парето, представленный на рис. 8.16. Точкам 1 и 2 на фронте соответствуют векторы решения $\mathbf{x}^1 = (0.1, 0.1, 0.5, 0.8)$ и $\mathbf{x}^2 = (0.022, 0.36, 2, 1)$. На рис. 8.17 приведены решения прямой задачи, полученные по двум этим векторам.

Таблица 8.2. Список решенных оптимизационных задач

Параметры задачи		$\min_{\mathbf{x}} F_3(\mathbf{x})$	$\min_{\mathbf{x}} F_4(\mathbf{x})$	
F	1-obj	2-par	9.5	8.4
		4-par	8.4	5.4
	2-obj	2-par	9.5	8.4
		4-par	8.4	5.4
\mathbf{x}	1-obj	2-par	(0.022, 0.35)	(0.1, 0.1)
		4-par	(0.022, 0.36, 2, 1)	(0.1, 0.1, 0.5, 0.8)
	2-obj	2-par	(0.022, 0.35)	(0.1, 0.1)
		4-par	(0.022, 0.36, 2, 1)	(0.1, 0.1, 0.5, 0.8)

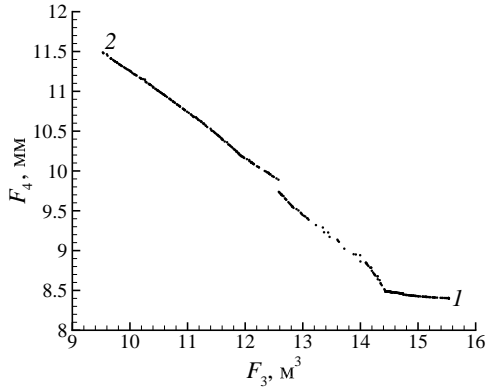


Рис. 8.14. Фронт Парето при двухпараметрической постановке оптимизационной задачи 8.5.2 с отмеченными для анализа точками.

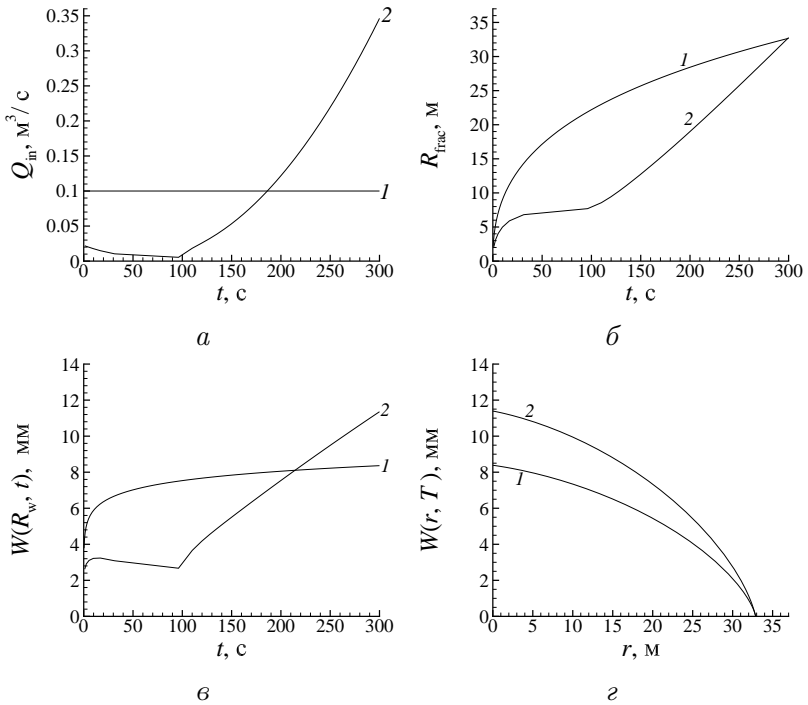


Рис. 8.15. Распределения $Q_{in}(t)$ (а), $R_{frac}(t)$ (б), $W(R_w, t)$ (в), $W(r, T)$ (г), полученные при решении прямой задачи для решений x^1 (1) и x^2 (2) оптимизационной задачи в двухпараметрической постановке.

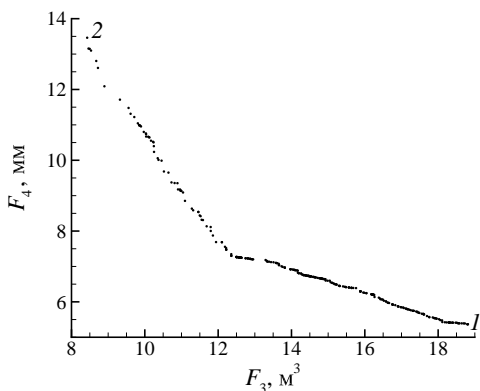


Рис. 8.16. Фронт Парето при четырехпараметрической постановке оптимизационной задачи 8.5.2 с отмеченными для анализа точками.

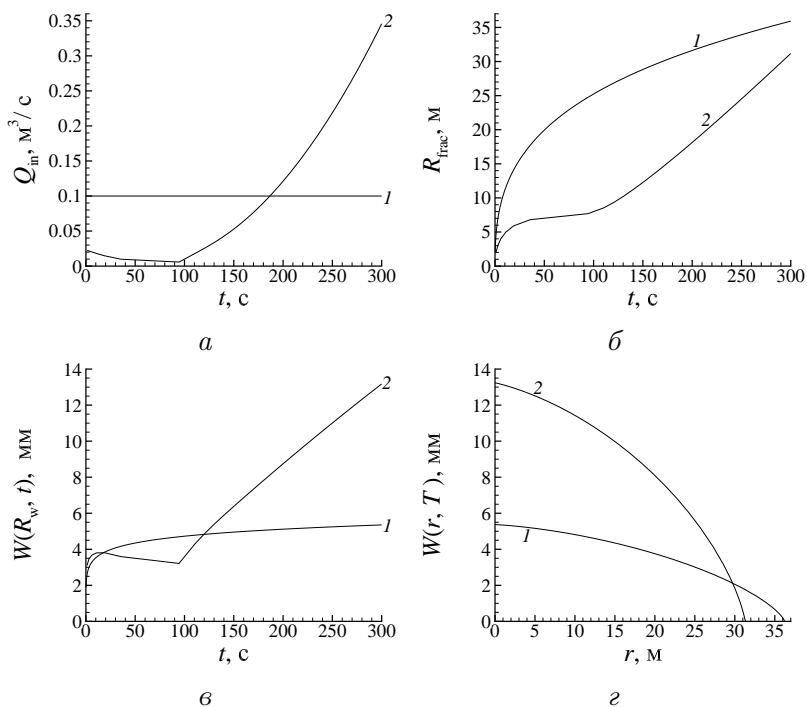


Рис. 8.17. Распределения $Q_{in}(t)$ (а), $R_{frac}(t)$ (б), $W(R_w, t)$ (в), $W(r, T)$ (г), полученные из решения прямой задачи для решений x^1 (1) и x^2 (2) оптимизационной задачи в четырехпараметрической постановке 8.5.2.

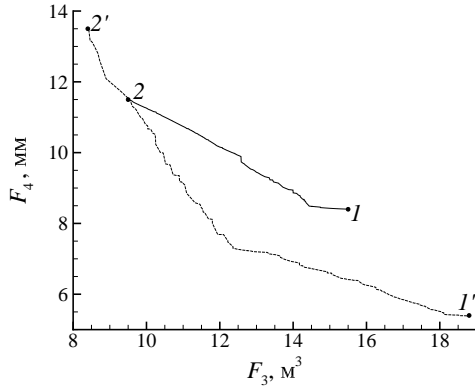


Рис. 8.18. Фронт Парето для двухпараметрической (сплошная) и четырехпараметрической (пунктир) постановок двухцелевой задачи оптимизации с точками 1, 1', 2, 2' соответственно.

На рис. 8.18 сравниваются фронты Парето, полученные при решении двух- и четырехпараметрической двухцелевых оптимизационных задач. В табл. 8.2 сведены данные решений одно- и двухцелевых оптимизационных задач. Сравниваются векторы параметров \mathbf{x} и минимальные значения функционалов F из решений одноцелевых задач с векторами параметров \mathbf{x} и минимальными значениями соответствующих функционалов из предельных точек фронтов Парето.

Следует отметить, что точки 1, 2 на фронте Парето абсолютных минимумов функционалов F_4 и F_3 соответственно дают значения этих функционалов, близкие к решениям задач одноцелевых оптимизаций, в которых минимизируется лишь один из этих функционалов, а значения второго не учитываются. Таким образом, решения, полученные в 8.5.1, являются частными случаями решения двухцелевой оптимизации или предельными точками фронта Парето.

8.5.3. Вариация закона закачки пропантанта

Одноцелевая оптимизация

Необходимо найти вектор

$$\mathbf{x} = (x_5, x_6) = (\delta_{\text{in}}^0, \delta_{\text{in}}^T), \quad (8.68)$$

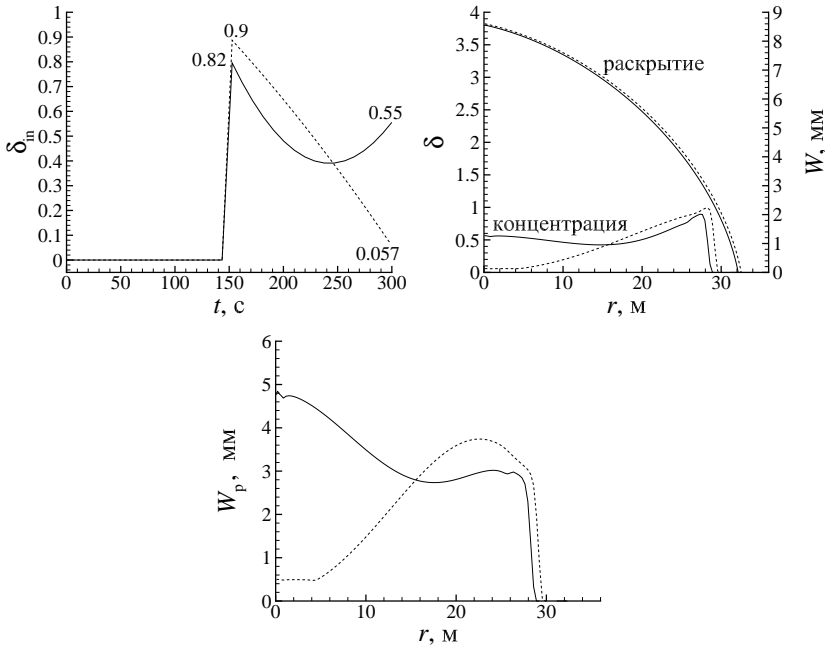


Рис. 8.19. Законы закачки пропантанта (вверху слева), распределения раскрытия трещины и пропантанта вдоль трещины (вверху справа) и ширина трещины, осевшей на пропантанта (внизу), полученные при решении оптимизационной задачи (8.68)–(8.71): $k_p/k_{res} = 10^4$ (сплошные); $k_p/k_{res} = 10^5$ (штриховые).

обеспечивающий минимум функционала

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} F_2(\mathbf{x}) \quad (8.69)$$

с фазовыми

$$0 \leq x_5 \leq 0.9, \quad 0 \leq x_6 \leq 0.9 \quad (8.70)$$

и функциональными

$$\phi_2(\mathbf{x}) = \max_t \delta_{in}(t) - 1 \leq 0; \quad \phi_3(\mathbf{x}) = -\min_t \delta_{in}(t) \leq 0 \quad (8.71)$$

ограничениями. Бралась два значения входящего в $F_2(\mathbf{x})$ отношения k_p/k_{res} : 10^4 и 10^5 . Найдены два решения оптимизационной задачи (8.68)–(8.71) $\mathbf{x} = (0.82, 0.55)$ и $\mathbf{x} = (0.9, 0.057)$, отвечающие отношениям k_p/k_{res} , равным 10^4 и 10^5 соответственно. На рис. 8.19 представлены решения этой задачи.

Двухцелевая оптимизация

Отыскивается вектор (8.68), обеспечивающий минимумы двум функционалам

$$\min_{\mathbf{x} \in X} F_2(\mathbf{x}), \quad \min_{\mathbf{x} \in X} F_6(\mathbf{x}) \quad (8.72)$$

с фазовыми (8.70) и функциональными (8.71) ограничениями. В $F_2(\mathbf{x})$ величина отношения k_p/k_{res} задавалась равной 10^4 . На фронте Парето (рис. 8.20) взяты две его предельные точки 1 и 2, а также средняя точка 3. Решения прямой задачи с законами закачки пропанта, полученными в указанных точках фронта Парето, приведены на рис. 8.21.

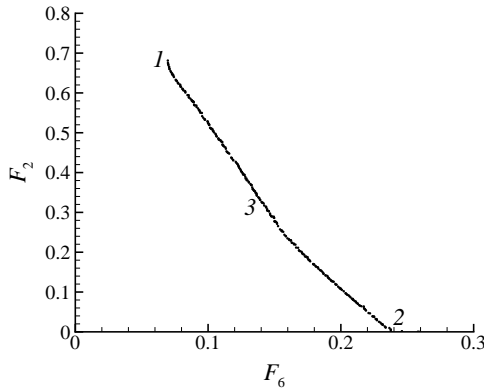


Рис. 8.20. Фронт Парето для оптимизационной задачи 8.5.3 с параметрами закона закачки пропанта ($\delta_{\text{in}}^0, \delta_{\text{in}}^T$) в указанных точках: (0.8, 0.34) — 1; (0.77, 0.55) — 2; (0.77, 0.44) — 3.

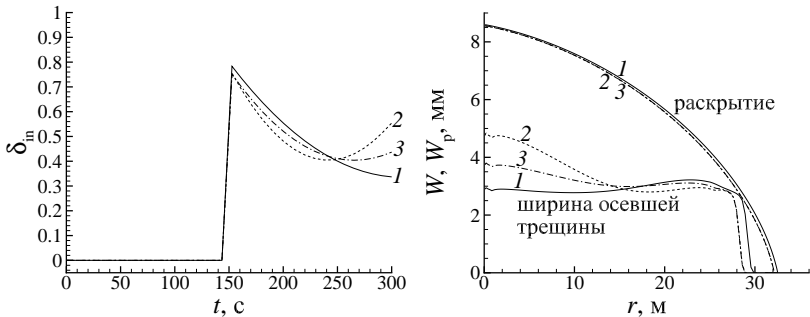


Рис. 8.21. Решение оптимизационной задачи 8.5.3 в точках 1, 2, 3: слева — законы закачки пропанта; справа — раскрытия трещины и ширины осевшей на пропант трещины.

8.6. Заключение

Предложены методы оптимизации дизайна ГРП, включающие в себя следующие подразделы.

- Расчет распространения трещины гидроразрыва под воздействием закачиваемой смеси жидкости Гершеля–Балкли и проппанта.
- Расчет продуктивности заполненной проппантом трещины на основе комбинации моделей плоскопараллельной и плоскорадиальной фильтрации для одновременного описания фильтрации жидкости в пласте и в трещине.
- Генетический алгоритм решения многоцелевой оптимизационной задачи и построения фронта Парето.

Для демонстрации возможностей метода проведена серия автоматических проектирований ГРП на основе функционалов, имеющих практическое значение и использующихся при ручном проектировании ГРП «в полях». Предложена формулировка этих функционалов, позволяющая включать их в оптимизационный алгоритм автоматического проектирования.

Путем выбора закона закачки жидкости и ее реологических параметров удалось решить следующие задачи:

- минимизации утечек,
- минимизации ширины трещины на скважине (или максимизации ее радиуса),
- минимизации усредненной по времени ширины трещины (или максимизации скорости роста).

Путем выбора закона концентрации проппанта в закачиваемой жидкости удалось решить задачи:

- повышения продуктивности пласта путем приведения безразмерной проводимости трещины к оптимальному значению,
- получения трещины, ширина которой наименее отклоняется от среднего значения.

Показано, что при решении задачи многоцелевой оптимизации построенный фронт Парето включает в себя решения минимизации одного функционала как частные случаи.

Обнаружено, что путем вариации закона закачки уменьшение ширины трещины (или увеличение ее радиуса) возможно только при увеличении объема утечек в породе пропорционально уменьшению ширины. Если же допускается вариация реологических параметров жидкости гидроразрыва, то возможно одновременное уменьшение ширины трещины и объема утечек по сравнению с фиксированной реологией жидкости.

Литература

1. Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отдел технических наук. — 1955. — № 5. — С. 3–41.
2. Geertsma J., de Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // J. Petroleum Technology. — 1969. — Vol. 21, No. 12. — P. 1571–1581. — SPE-2458-PA.
3. Perkins T.K., Kern L.R. Widths of hydraulic fractures // J. Petroleum Technology. — 1961. — Vol. 13, No. 9. — P. 937–949.
4. Nordgren R.P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // SPE Journal. — 1972. — Vol. 12, No. 4. — P. 306–314. — SPE-3009-PA.
5. Abe H., Mura T., Keer L.M. Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks // J. Geophysical Research. — 1976. — Vol. 81, No. 29. — P. 5335–5340.
6. Li S., Mear M.E., Xiao L. Symmetric weak-form integral equation method for three-dimensional fracture analysis // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1998. — Vol. 151, No. 3–4. — P. 435–459.
7. Gupta P., Duarte C.A. Simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fracture propagation // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2014. — Vol. 38, No. 13. — P. 1397–1430.
8. Vandamme L., Curran J.H. A three-dimensional hydraulic fracturing simulator // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. — 1989. — Vol. 28, No. 4. — P. 909–927.
9. Mi Y., Aliabadi M.H. Three-dimensional crack growth simulation using BEM // Computers and Structures. — 1994. — Vol. 52, No. 5. — P. 871–878.
10. Morales R.H., Brady B.H., Ingraffea A.R. Three-dimensional analysis and visualization of the wellbore and the fractur-

- ing process in inclined wells // Low Permeability Reservoirs Symposium. — 1993. — SPE-25889-MS.
11. Sousa J.L., Carter B.J., Ingraffea A.R. Numerical simulation of 3D hydraulic fracture using newtonian and power-law fluids // Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. — 1993. — Vol. 30, No. 7. — P. 1265–1271.
 12. Carter B.J., Desroches J., Ingraffea A.R., Wawrzynek P.A. Simulating fully 3D hydraulic fracturing // Modeling in Geomechanics / Ed. by M. Zaman, G. Gioda, J. Booker. — John Wiley & Sons, 2000. — P. 525–557.
 13. Dong C.Y., de Pater C.J. Numerical modeling of crack reorientation and link-up // Advances in Engineering Software. — 2002. — Vol. 33, No. 7–10. — P. 577–587.
 14. Rungamornrat J., Wheeler M.F., Mear M.E. Coupling of fracture/non-newtonian flow for simulating nonplanar evolution of hydraulic fractures // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — 2005. — SPE-96968-MS.
 15. Barr D.T. Leading-edge Analysis for Correct Simulation of Interface Separation and Hydraulic Fracturing: Ph.D. thesis / D.T. Barr ; Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering. — 1991. — 229 p.
 16. Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // Journal of Basic Engineering. — 1963. — Vol. 85, No. 4. — P. 519–525.
 17. Shokin Yu., Cherny S., Esipov D., Lapin V., Lyutov A., Kuranakov D. Three-dimensional model of fracture propagation from the cavity caused by quasi-static load or viscous fluid pumping // Communications in Computer and Information Science. — Springer Science + Business Media, 2015. — P. 143–157. — DOI:10.1007/978-3-319-25058-8_15.
 18. Cherny S., Lapin V., Esipov D., Kuranakov D., Avdyushenko A., Lyutov A., Karnakov P. Simulating fully 3D non-planar evolution of hydraulic fractures // Int. J. Fracture. — 2016. — DOI:10.1007/s10704-016-0122-x.
 19. Kuranakov D.S., Esipov D.V., Lapin V.N., Cherny S.G. Modification of the boundary element method for computation of three-dimensional fields of strain-stress state of cavities with cracks // Engineering Fracture Mechanics. — 2016. — Vol. 153. — P. 302–318. — DOI:10.1016/j.engfracmech.2015.09.052.
 20. Barati R., Liang J.-T. A review of fracturing fluid systems used for hydraulic fracturing of oil and gas wells // Journal

- of Applied Polymer Science. — 2014. — Vol. 131, No. 16. — P. 1–11.
21. Ribeiro L.H., Sharma M.M. Multiphase fluid-loss properties and return permeability of energized fracturing fluids // SPE Production & Operations. — 2012. — Vol. 27, No. 03. — P. 265–277. — SPE-139622-PA.
 22. Herschel W.H., Bulkley R. Konsistenzmessungen von gummi-benzollösungen // Kolloid-Zeitschrift. — 1926. — Vol. 39, No. 4. — P. 291–300.
 23. Cherny S., Chirkov D., Lapin V., Muranov A., Bannikov D., Miller M., Willberg D., Medvedev O., Alekseenko O. Two-dimensional modeling of the near-wellbore fracture tortuosity effect // Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2009. — Vol. 46, No. 6. — P. 992–1000.
 24. Алексеенко О.П., Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2011. — Т. 11, № 3. — С. 36–59.
 25. Черный С.Г., Есипов Д.В., Лапин В.Н., Куранаков Д.С. Проблемы моделирования гидравлического разрыва пласта в двумерной и трехмерной постановках // Материалы IX междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012). — Алушта: Изд. МАИ, 2012. — С. 441–443.
 26. Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Вычислительные технологии. — 2014. — Т. 19, № 2. — С. 33–61.
 27. Карнаков П.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Модель гидроразрыва пласта, включающая механизм закупоривания трещины пропантом // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2014. — Т. 12, № 1. — С. 19–33. — ISSN 1818-7900.
 28. Cherny S.G., Lapin V.N., Chirkov D.V., Alekseenko O.P., Medvedev O.O. 2D modeling of hydraulic fracture initiating at a wellbore with or without microannulus // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. — The Woodlands, Texas, 2009. — SPE-119352-MS.
 29. Есипов Д.В. Моделирование процесса инициации гидроразрыва пласта методом граничных элементов // Вестник КазНУ. Серия: математика, механика, информатика. — 2010. — Т. 3, № 66. — С. 270–277.

30. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Метод граничных элементов и его приложение к задаче разрушения перфорированной скважины // 10-я Всероссийская научная конференция «Краевые задачи и математическое моделирование». — Новокузнецк, 2010. — С. 159–168.
31. Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Многозонный метод граничных элементов и его применение к задаче инициации трещины гидроразрыва из перфорированной обсаженной скважины // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16, № 6. — С. 13–26.
32. Alekseenko O.P., Potapenko D.I., Cherny S.G., Esipov D.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N. 3-D modeling of fracture initiation from perforated non-cemented wellbore // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. — The Woodlands, Texas, 2012. — P. 1–16. — SPE-151585-PA.
33. Alekseenko O.P., Potapenko D.I., Kuranakov D.S., Lapin V.N., Cherny S.G., Esipov D.V. 3D modeling of fracture initiation from cemented perforated wellbore // 19th European Conference on Fracture “Fracture mechanics for durability, reliability and safety”, Kazan, Russia, 1 CD-ROM. — 2012.
34. Alekseenko O.P., Potapenko D.I., Cherny S.G., Esipov D.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N. 3D modeling of fracture initiation from perforated noncemented wellbore // SPE Journal. — 2013. — Vol. 18, No. 3. — P. 589–600.
35. Aidagulov G., Alekseenko O., Chang F., Bartko K., Cherny S., Esipov D., Kuranakov D., Lapin V. Model of hydraulic fracture initiation from the notched openhole // Proceedings of the 2015 Annual Technical Symposium & Exhibition. — Al Khobar, Saudi Arabia, 2015. — P. 1–12. — SPE-178027-MS.
36. Briner A., Florez J.C., Nadezhdin S., Alekseenko O., Gurmen N., Cherny S., Kuranakov D., Lapin V. Impact of perforation tunnel orientation and length in horizontal wellbores on fracture initiation pressure in maximum tensile stress criterion model for tight gas fields in the Sultanate of Oman // SPE Middle East Oil & Gas Show and Conference. — Manama, Bahrain, 2015. — SPE-172663-MS.
37. Briner A., Florez J.C., Nadezhdin S., Gurmen N., Alekseenko O., Cherny S., Kuranakov D., Lapin V. Impact of wellbore orientation on fracture initiation pressure in maxi-

- imum tensile stress criterion model for tight gas field in the Sultanate of Oman // SPE North Africa Technical Conference and Exhibition. — Cairo, Egypt, 2015. — SPE-175725-MS.
38. Briner A., Florez J.C., Nadezhdin S., Gurmen N., Alekseenko O., Cherny S., Kuranakov D., Lapin V. Impact of wellbore completion type on fracture initiation pressure in maximum tensile stress criterion model for tight gas field in the Sultanate of Oman // International Petroleum Technology Conference. — Doha, Qatar, 2015. — IPCT-18261-MS.
 39. Лапин В.Н., Черный С.Г., Есипов Д.В., Куранakov Д.С. Трехмерная модель зарождения и распространения трещины от полости в упругой среде нагруженной постоянным давлением // VIII Казахстанско-Российская международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли», Казахстан, г. Атырау. — 2014. — С. 1–7.
 40. Куранakov Д.С., Есипов Д.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Трехмерная численная модель зарождения трещин, учитывающая «эффект размера» // VIII Казахстанско-Российская международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли», Казахстан, г. Атырау. — 2014. — С. 1–6.
 41. Куранakov Д.С., Есипов Д.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Трехмерный дуальный метод граничных элементов решения задач упругости с трещинами // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2015. — Т. 13, № 1. — С. 74–90. — ISSN 1818-7900, EISSN 2410-0420.
 42. Cherny S.G., Lapin V.N. 3D model of hydraulic fracture with Herschel-Bulkley compressible fluid pumping // Procedia Structural Integrity. — 2016. — Vol. 2. — P. 2479–2486.
 43. Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir stimulation. — Third edition. — John Wiley & Sons, 2000. — 856 p.
 44. Behrmann L.A., Elbel J.L. Effect of perforations on fracture initiation // J. Petroleum Technology. — 1991. — Vol. 43, No. 05. — P. 608–615. — SPE-20661-PA.
 45. Geertsma J., Haafkens R.A. Comparison of the theories for predicting width and extent of vertical hydraulically induced fractures // J. Energy Res. Tech. — 1979. — Vol. 101, No. 1. — P. 8–19.

46. Mendelsohn D.A. A review of hydraulic fracture modeling – part I: General concepts, 2D models, motivation for 3D modeling // J. Energy Res. Tech. — 1984. — Vol. 106, No. 3. — P. 369–376.
47. Mendelsohn D.A. A review of hydraulic fracture modeling – part II: 3D modeling and vertical growth in layered rock // J. Energy Res. Tech. — 1984. — Vol. 106, No. 4. — P. 543–553.
48. Geertsma J. Two-dimensional fracture propagation models // Recent advances in hydraulic fracturing. SPE Monograph 12 / Ed. by J.L. Gidley, S.A. Holditch, D.E. Nierode, R.W. Veatch. — Richardson, Texas: SPE, 1989. — P. 81–94.
49. Adachi J., Siebrits E., Peirce A., Desroches J. Computer simulation of hydraulic fractures // Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2007. — Vol. 44. — P. 739–757.
50. Rahman M.M., Rahman M.K. A review of hydraulic fracture models and development of an improved pseudo-3D model for stimulating tight oil/gas sand // Energy Sources, Part A. — 2010. — Vol. 32. — P. 1416–1436.
51. Ching H.Y. Mechanics of Hydraulic Fracturing. — Houston, Texas: Gulf publishing company, 1997. — 182 p.
52. Carter R.D. Appendix I. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area // Drilling and Production Practice / Ed. by G.C. Howard, C.R. Fast. — N. Y.: American Petrol. Institute, 1957. — P. 261–270.
53. Ивашнев О.Е., Смирнов Н.Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестник МГУ. Серия 1: Математика. Механика. — 2003. — № 6. — С. 28–36.
54. Смирнов Н.Н., Тагирова В.Р. Автомодельные решения задачи о формировании трещины гидроразрыва в пористой среде // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. — 2007. — № 1. — С. 70–82.
55. Тагирова В.Р. Распространение трещины гидроразрыва под напором неньютоновской жидкости // Вестник МГУ. Серия 1: Математика. Механика. — 2009. — № 6. — С. 33–41.
56. Татосов А.В. Модель закачки пропанта в трещину гидроразрыва // Вычислительные технологии. — 2005. — Т. 10, № 6. — С. 91–101.
57. Татосов А.В. Движение вязкой жидкости с примесью частиц в пористом канале // Вестник ТюмГУ. — 2007. — № 5. — С. 56–60.
58. Ентов В.М., Зазовский А.Ф., Стелин И.Б., Хараидзе Д.М. Одномерная модель распространения трещины гидрораз-

- рыва // Материалы IX Всесоюзного семинара “Численные методы решения задач фильтрации. Динамика многофазных сред”. — Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1989. — С. 91–95.
59. Gordeev Y.N., Entov V.M. The pressure distribution around a growing crack // *J. Appl. Math. Mech.* — 1997. — Vol. 51, No. 6. — P. 1025–1029.
60. Mathias S.A., Reeuwijk M. Hydraulic fracture propagation with 3-D leak-off // *Transport in Porous Media.* — 2009. — Vol. 80. — P. 499–518.
61. Sneddon I., Lowengrub M. *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity.* — John Wiley & Sons, 1969. — 221 p.
62. Spence D.A., Sharp P. Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow // *Proc. Royal Soc. A.* — 1985. — Vol. 400. — P. 289–313.
63. Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения.* — М.: Наука, 1974. — 640 с.
64. Daneshy A.A. On the design of vertical hydraulic fractures // *J. Petroleum Technology.* — 1973. — Vol. 1. — P. 83–97.
65. Adachi J.I., Detournay E. Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid // *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.* — 2002. — Vol. 26. — P. 579–604.
66. Баренблатт Г.И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта // *ПММ.* — 1956. — Т. 20, № 4. — С. 475–486.
67. Parpanastasiou P. The influence of plasticity in hydraulic fracturing // *Int. J. Fracture.* — 1997. — Vol. 84. — P. 61–97.
68. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа.* — М.: Наука, 1970. — 904 с.
69. Бабе Г.Д., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А. Идентификация моделей гидравлики. — Новосибирск: Наука, 1980. — 161 с.
70. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Прямолинейный гидроразрыв в упругой плоскости // *Изв. АН СССР. МТТ.* — 1988. — № 6. — С. 145–149.
71. Акулич А.В., Звягин А.В. Численное моделирование распространения трещины гидроразрыва // *Вестник МГУ. Серия 1: Математика. Механика.* — 2008. — № 1. — С. 43–49.
72. Зазовский А.Ф., Одишария М.Г., Песляк Ю.А. Автомодельные решения задачи о распространении трещины гид-

- роразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. МТТ. — 1986. — № 5. — С. 92–10.
73. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Некоторые особенности плоской задачи гидроразрыва упругой среды // ФТПРПИ. — 1999. — № 3. — С. 64–70.
 74. Desroches J., Detournay E., Lenoach B., Papanastasiou P., Pearson J.R.A., Thiercelin M., Cheng A.H.-D. The crack tip region in hydraulic fracturing // Proc. Royal Soc. A. — 1994. — No. 447. — P. 39–48.
 75. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Рост почти заполненной осесимметричной трещины гидроразрыва при малых и больших утечках // ФТПРПИ. — 2004. — № 3. — С. 1–11.
 76. Garagash D., Detournay E. The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium // J. Applied Mechanics. — 2000. — Vol. 67, No. 1. — P. 183–192.
 77. Lecampion B., Detournay E. An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag // Computer Meth. Appl. Mech. Eng. — 2007. — Vol. 196, No. 49–52. — P. 4863–4880.
 78. Астафьев В.И. Асимптотический анализ процесса развития трещины гидравлического разрыва пласта // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. — 2010. — № 5. — С. 105–116.
 79. Sheddon I.N., Elliott A.A. The opening of a griffith crack under internal pressure // Quarterly of Applied Mathematics. — 1946. — Vol. 4, No. 3. — P. 262–267.
 80. Nolte K.G. Fracturing-pressure analysis for nonideal behavior // J. Petroleum Technology. — 1991. — Vol. 43, No. 2. — P. 210–218.
 81. Golovin S.V., Isaev V.I., Baykin A.N., Kuznetsov D.S., Mamonov A.E. Hydraulic fracture numerical model free of explicit tip tracking // Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2015. — Vol. 76. — P. 174–181.
 82. Baykin A.N., Golovin S.V. Modelling of hydraulic fracture propagation in inhomogeneous poroelastic medium // J. Phys.: Conf. Ser. — 2016. — Vol. 722, No. 012003.
 83. Baykin A.N., Golovin S.V. Influence of pore pressure to the development of a hydraulic fracture in poroelastic medium // Int. J. Solids and Structures. — To appear.
 84. Shelukhin V.V., Baikov V.A., Golovin S.V., Davletbaev A.Y., Starovoitov V.N. Fractured water injection wells:

- Pressure transient analysis // *Int. J. Solids and Structures*. — 2014. — Vol. 51, No. 11. — P. 2116–2122.
85. Golovin S.V., Baykin A.N. Stationary dipole at the fracture tip in a poroelastic medium // *Int. J. Solids and Structures*. — 2015. — Vol. 69–70. — P. 305–310.
 86. Valov A.V., Golovin S.V. Determination of hydraulic fracture parameters using a non-stationary fluid injection // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2016. — Vol. 722, No. 012008.
 87. Abe H., Keer L.M., Mura T. Theoretical study of hydraulically fractured penny-shaped cracks in hot, dry rocks // *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. — 1979. — Vol. 3. — P. 79–96.
 88. Зазовский А.Ф. Распространение плоской круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // *Изв. АН СССР. МТТ*. — 1979. — № 2. — С. 103–109.
 89. Слепян Л.И. *Механика трещин*. — Л.: Судостроение, 1990. — 296 с.
 90. Atkinson C., Eftaxiopoulos D.A. Numerical and analytical solution for the problem of hydraulic fracturing from cased and cemented wellbore // *Int. J. Solids and Structures*. — 2002. — Vol. 39, No. 6. — P. 1621–1650.
 91. Зубков В.В., Кошелев В.Ф., Линьков А.М. Численное моделирование инициирования и роста трещин гидроразрыва // *ФТПРПИ*. — 2007. — № 1. — С. 45–63.
 92. Мартынюк П.А. Особенности развития трещин гидроразрыва в поле сжатия // *ФТПРПИ*. — 2008. — № 6. — С. 19–29.
 93. Settari A., Cleary M. Three-dimensional simulation of hydraulic fracturing // *J. Petroleum Technology*. — 1984. — Vol. 36, No. 7. — P. 1177–1190.
 94. Ouyang S., Carey G.F., Yew C.H. An adaptive finite element scheme for hydraulic fracturing with proppant transport // *Int. J. Numerical Methods in Fluids*. — 1997. — Vol. 24. — P. 645–670.
 95. Гордеев Ю.Н. Автомодельное решение задачи о распространении псевдотрехмерной вертикальной трещины гидроразрыва в непроницаемом пласте // *Изв. РАН. МЖГ*. — 1995. — № 6. — С. 79–86.
 96. Adachi J.I., Detournay E., Peirce A.P. Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers // *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences*. — 2010. — Vol. 47, No. 4. — P. 625–639.

97. Papanastasiou P., Zervos A. Three-dimensional stress analysis of a wellbore with perforations and a fracture // SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering. — 1998. — SPE-47378-MS.
98. Hossain M.M., Rahman M.K., Rahman S.S. Hydraulic fracture initiation and propagation: roles of wellbore trajectory, perforation and stress regimes // J. Petroleum Science and Engineering. — 2000. — Vol. 27, No. 3-4. — P. 129-149.
99. Yuan Y., Abousleiman Y., Weng X., Roegiers J.-C. Three-dimensional elastic analysis on fracture initiation from a perforated borehole // Paper SPE. — 2005. — SPE-29601.
100. Sedov L.I. Mechanics of Continuous Media. — World Scientific, 1997. — 1368 p.
101. Betti E. Teoria dell elasticita // Il Nuovo Cienmento. — 1872. — P. 7-10.
102. Somigliana C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo // Il Nuovo Cienmento. — 1886. — P. 17-29.
103. Купрадзе В.Д. Методы теории потенциала в теории упругости. — М.: Наука, 1963. — 472 с.
104. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1979. — 560 с.
105. Амензаде Ю.А. Теория упругости: Учебник для университетов. — М.: Высшая школа, 1971. — 288 с.
106. Lachat J.C., Watson J.O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. — 1976. — Vol. 10, No. 5. — P. 991-1005.
107. Cruse T. Boundary element analysis in computational fracture mechanics. — Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1988. — ISBN: 90-247-3614-5.
108. Cruse T.A. Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis // Computers and Structures. — 1973. — Vol. 3, No. 3. — P. 509-527.
109. Blandford G.E., Ingraffea A.R., Liggett J.A. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. — 1981. — Vol. 17, No. 3. — P. 387-404.
110. Crouch S.L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. i. infinite body solution // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. — 1976. — Vol. 10, No. 2. — P. 301-343.
111. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. — М.: Мир, 1987.

112. Bueckner H.F. Field singularities and related integral representations // *Mechanics of fracture, Vol. 1: Methods of analysis and solutions of crack problems* / Ed. by G.C. Sih. — Springer-Verlag, 1973. — P. 239–314.
113. Watson J.O. Hermitian cubic boundary elements for plane problems of fracture mechanics // *Res Mechanica*. — 1982. — Vol. 4. — P. 23–42.
114. Watson J.O. Hermitian cubic and singular elements for plane strain // *Developments in Boundary Element Methods – 4* / Ed. by P.K. Banerjee, J.O. Watson. — London: Elsevier, 1986. — P. 1–28.
115. Hong H.-K., Chen J.-T. Derivations of integral equations of elasticity // *J. Engng. Mech.* — 1988. — Vol. 114, No. 6. — P. 1028–1044.
116. Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*. — 1992. — Vol. 33, No. 6. — P. 1269–1287.
117. Mi Y., Aliabadi M.H. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 1992. — Vol. 10, No. 2. — P. 161–171.
118. Rizzo F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics // *Quarterly of Applied Mathematics*. — 1967. — Vol. 25, No. 1. — P. 83–95.
119. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. — М.: Мир, 1984. — 494 с.
120. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
121. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. — М.: Мир, 1981. — 155 с.
122. Smith I.M. Programming the finite element method. — Chichester, West Sussex, UK: John Wiley & Sons, 2014. — ISBN: 978-1-119-97334-8.
123. Sládek V., Sládek J. Why use double nodes in BEM? // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 1991. — Vol. 8, No. 2. — P. 109–112.
124. Liu Y.J., Li Y.X. Revisit of the equivalence of the displacement discontinuity method and boundary element method for solving crack problems // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2014. — Vol. 47. — P. 64–67.
125. Chen J.T., Kuo S.R., Chen W.C., Liu L.W. On the free term on the dual BEM for the two and three-dimensional laplace

- problems // *J. of Marine Science and Technology*. — 2000. — Vol. 8, No. 1. — P. 8–15.
126. Rungamornrat J. A Computational Procedure for Analysis of Fractures in Three Dimensional Anisotropic Media: Ph. D. thesis / J. Rungamornrat ; Department of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, The University of Texas at Austin. — 2004.
 127. Napier J., Detournay E. Propagation of non-planar pressurized cracks from a borehole // *Research and Applications in Structural Engineering, Mechanics and Computation*. — Informa UK Limited, 2013. — P. 597–602.
 128. Melenk J.M., Babuška I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 1996. — Vol. 139, No. 1-4. — P. 289–314.
 129. Chen J.-T., Hong H.-K. Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series // *Applied Mechanics Reviews*. — 1999. — Vol. 52, No. 1. — P. 17–33.
 130. Aliabadi M.H. *The Boundary Element Method, Applications in Solids and Structures (Volume 2)*. — John Wiley & Sons, 2002. — ISBN: 0470842989.
 131. Cisilino A.P., Aliabadi M.H. Three-dimensional BEM analysis for fatigue crack growth in welded components // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. — 1997. — Vol. 70, No. 2. — P. 135–144.
 132. Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolph T.J., Rizzo F.J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations // *J. Applied Mechanics*. — 1992. — Vol. 59, No. 3. — P. 604.
 133. Hadamard J. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. — New Haven: Yale University Press, 1923. — 316 p.
 134. Hartranft R.J., Sih R.J. Stress singularity for a crack with an arbitrarily curved front // *Engineering Fracture Mechanics*. — 1977. — Vol. 9, No. 3. — P. 705–718.
 135. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика*. — 5-е изд. — М.: Физматлит, 2003. — Т. VII. Теория упругости. — 257 с.
 136. Доннел Л.Г. *Балки, пластины и оболочки*. — 1-е изд. — М.: Наука, 1982.
 137. Irwin G. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // *J. Applied Mechanics*. — 1957. — Vol. 24. — P. 361–364.

138. Aliabadi M.H. Boundary element formulations in fracture mechanics // Applied Mechanics Reviews. — 1997. — Vol. 50, No. 2. — P. 83.
139. Tsepoura K.G., Polyzos D. Static and harmonic BEM solutions of gradient elasticity problems with axisymmetry // Computational Mechanics. — 2003. — Vol. 32, No. 1–2. — P. 89–103.
140. Salgado N.K., Aliabadi M.H. Boundary element analysis of fatigue crack propagation in stiffened panels // Journal of Aircraft. — 1998. — Vol. 35, No. 1. — P. 122–130.
141. Smith R.N.L. The solution of mixed-mode fracture problems using the boundary element method // Engineering Analysis. — 1988. — Vol. 5, No. 2. — P. 75–80.
142. Fedelinski P., Aliabadi M.H., Rooke D.P. The time-domain DBEM for rapidly growing cracks // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. — 1997. — Vol. 40, No. 9. — P. 1555–1572.
143. Черепанов Г.П. О распространении трещин в сплошной среде // ПММ. — 1967. — Т. 31, № 3. — С. 476–488.
144. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // J. Applied Mechanics. — 1968. — Vol. 35, No. 2. — P. 379–386.
145. Ishikawa H., Kitagawa H., Okamura H. J-integral of a mixed mode crack and its application // Proc. 3rd Int. Conf. on Mechanical Behaviour of Materials. — Vol. 3. — Pergamon Press, 1980. — P. 447–455.
146. Aliabadi M.H. Evaluation of mixed mode stress intensity factors using path independent integral // Proc. 12th Int. Conf. on Boundary Elements Method. — Vol. 3. — Southampton: Computational Mechanics Publications, 1990. — P. 281–292.
147. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. — М.: Мир, 1990.
148. Tada H. The stress analysis of cracks handbook. — New York: ASME Press, 2000. — ISBN: 9780871706799.
149. Sneddon I.N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1946. — Vol. 187, No. 1009. — P. 229–260.
150. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. — М.: Физматлит, 2006. — 328 с.
151. Bažant Z.P. Size effect on structural strength: a review // Archive of Applied Mechanics. — 1999. — Vol. 69. — P. 703–725.

152. Bažant Z.P. Size effect // *Int. J. Solids and Structures*. — 1999. — Vol. 37. — P. 69–80.
153. Daneshy A. Horizontal well fracturing: A state-of-the-art report // *World Oil*. — 2013. — Vol. 234, No. 7.
154. Rankine W. *A Manual of Applied Mechanics*. — London, Glasgow: Richard Griffin and Company, 1857. — 640 p.
155. Saint-Venant B. Sur l'établissement des equations des mouvements interieurs operes dans les corps solides ductiles au dela des limites ou l'élasticite pourrait les ramener a leur premier etat // *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*. — 1870. — Vol. 80, No. 10. — P. 473–480.
156. Tresca H. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions // *Compte Rendus de l'Academie des Sciences*. — 1864. — Vol. 59. — P. 754–758.
157. Coulomb C.A. Sur une application des regles de maximis et minimis a quelques problemes de statique: relatifs a l'architecture // *Mem. Acad. Roy. Div. Sav.* — 1773. — Vol. 7. — P. 343–387.
158. Mohr O. Welche umstande bedingen die elastizitatzgrenze und den bruch eines materiales? // *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*. — 1900. — Vol. 44. — P. 1524–1530.
159. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design // *Quarterly of Applied Mathematics*. — 1952. — Vol. 10, No. 2. — P. 157–165.
160. Huang J., Griffiths D.V., Wong S.W. Initiation pressure location and orientation of hydraulic fracture // *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences*. — 2012. — Vol. 49. — P. 59–67.
161. You M. Discussion on “A generalized three-dimensional failure criterion for rock masses” // *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. — 2013. — Vol. 5. — P. 412–416.
162. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*. — 1921. — Vol. 221. — P. 163–198.
163. Sammis C.G., Ashby M.F. The failure of brittle porous solids under compressive stress states. // *Acta Metallurgica*. — 1986. — Vol. 34, No. 3. — P. 511–526.
164. Ingraffea A.R. Theory of crack initiation and propagation of rock structures // *Fracture mechanics of rock* / Ed. by B.K. Atkinson. — London: Academic Press, 1987. — P. 71–110.

165. Carter B.J. Size and stress gradient effects on fracture around cavities // *Rock Mech. Rock Engng.* — 1992. — Vol. 25(3). — P. 167–186.
166. Pais M.J., Kim N.-H., Davis T. Reanalysis of the extended finite element method for crack initiation and propagation // *AIAA SDM Student Symposium.* — 2010.
167. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* — 1960. — Vol. 8, No. 2. — P. 100–104.
168. Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture // *Advances in Applied Mechanics.* — Elsevier, 1962. — P. 55–129.
169. Hillerborg A., Modéer M., Petersson P.-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements // *Cement and Concrete Research.* — 1976. — Vol. 6, No. 6. — P. 773–781.
170. Hermes F.H. Process zone and cohesive element size in numerical simulations of delamination in bi-layers: Master's thesis. — Eindhoven University of Technology. — 2010.
171. Kyaw P.-E., Tanner D.W.J., Becker A.A., Sun W., Tsang D.K.L. Modelling crack growth within graphite bricks due to irradiation and radiolytic oxidation // *Procedia Materials Science.* — 2014. — Vol. 3. — P. 39–44.
172. Neuber H. *Kerbspannungslehre Grundlagen für Genaue Spannungsrechnung.* — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1937. — ISBN: 978-3-662-36565-6.
173. Novozhilov V.V. On a necessary and sufficient criterion for brittle strength // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* — 1969. — Vol. 33, No. 2. — P. 201–210.
174. Lajtai E.Z. Effect of tensile stress gradient on brittle fracture initiation // *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts.* — 1972. — Vol. 9, No. 5. — P. 569–578.
175. Berto F., Lazzarin P., Gómez F.J., Elices M. Fracture assessment of u-notches under mixed mode loading: two procedures based on the 'equivalent local mode I' concept // *Int. J. Fracture.* — 2007. — Vol. 148, No. 4. — P. 415–433.
176. Chang F.F., Bartko K., Dyer S., Aidagulov G., Suarez-Rivera R., Lund J. Multiple fracture initiation in openhole without mechanical isolation: First step to fulfill an ambition // *SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference.* — 2014. — SPE-168638-MS, p. 1-18.

177. Ito T., Hayashi K. Physical background to the breakdown pressure in hydraulic fracturing tectonic stress measurements // *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*. — 1991. — Vol. 28, No. 4. — P. 285–293.
178. Bažant Z.P., Planas J. Fracture and size effect in concrete and other quasi-brittle materials. — Boca Raton, Florida: CRC Press LLC, 1998. — ISBN: 9780849382840. — 640 p.
179. van Vliet M.R.A., van Mier J.G.M. Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2000. — Vol. 65, No. 2-3. — P. 165–188.
180. Rummel F. Fracture mechanics approach to hydraulic fracturing stress measurements // *Fracture mechanics of rock* / Ed. by B.K. Atkinson. — Academic Press, London, 1987. — P. 217–240.
181. Paris P.C., Sih G.C. Stress analysis of cracks. — American Society of Testing and Materials, ASTM STP 381, 1965.
182. Marsavina L., Constantinescu D.M., Linul E., Apostol D.A., Voiconi T., Sadowski T. Refinements on fracture toughness of PUR foams // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2014. — Vol. 129. — P. 54–66.
183. Zhao Z., Kim H., Haimson B. Hydraulic fracturing initiation in granite // 2nd North American Rock Mechanics Symposium. — Montreal, Quebec, Canada: American Rock Mechanics Association, 1996. — P. 1–6. — ARMA-96-1279.
184. Lhomme T. Initiation of Hydraulic Fractures in Natural Sandstones: Ph. D. thesis / T. Lhomme ; Delft University of Technology. — 2005. — 257 p.
185. Halleck P.M., Behrmann L.A. Penetration of shaped charges in stressed rock // *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*. — 1991. — Vol. 28, No. 6. — P. A369.
186. Hubbert M.K., Willis D.G. Mechanics of hydraulic fracturing // *J. Petroleum Technology*. — 1957. — Vol. 9. — P. 153–168.
187. Briner A., Moiseyenko A.V., Prioul R., Abbas S., Nadezhdin S.V., Gurmen M.N. Hydraulic fracture initiation and propagation model provides theoretical ground for hybrid-type fracturing schedules in unconventional gas reservoir in the Sultanate of Oman // *SPE Middle East Unconventional Resources Conference and Exhibition*. — Muscat, Oman, 2015. — SPE-172950-MS.

188. Qobi L., Kindy S., Bate K.J. How geomechanical data integration helped constrain the placement of the first horizontal well in a new tight gas field // SPE Unconventional Gas Conference and Exhibition. — 2013. — SPE-163954-MS.
189. Atwi M.A., Al-Driweesh S.M., Al-Sagr A.M., Garzon F.O., Al-Mulhim A.A., Kharrat W., Stucker J., Keong A.H. Successful implementation of abrasive perforation in highly deviated HP/HT gas well // SPE International Production and Operations Conference & Exhibition. — 2012. — SPE-157379-MS.
190. Bansal R.K. A textbook of strength of materials : (in S.I. units). — Bangalore: Laxmi Publications, 2010. — ISBN: 8131808149.
191. Malvern L. Introduction to the mechanics of a continuous medium. — Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1969. — ISBN: 0134876032.
192. Nuismer R.J. An energy release rate criterion for mixed mode fracture // Int. J. Fracture. — 1975. — Vol. 11, No. 2. — P. 245–250.
193. Germanovich L.N., Cherepanov G.P. On some general properties of strength criteria // Int. J. Fracture. — 1995. — Vol. 71, No. 1. — P. 37–56.
194. Weber W., Steinmann P., Kuhn G. Precise 3D crack growth simulations // Int. J. Fracture. — 2008. — Vol. 149, No. 2. — P. 175–192.
195. Leblond J.-B., Frelat J. Crack kinking from an initially closed crack // Int. J. Solids and Structures. — 2000. — Vol. 37. — P. 1595–1614.
196. Leblond J.-B., Frelat J. Crack kinking from an interface crack with initial contact between the crack lips // European Journal of Mechanics – A/Solids. — 2001. — Vol. 20, No. 6. — P. 937–951.
197. Leblond J.-B., Frelat J. Crack kinking from an initially closed, ordinary or interface crack, in the presence of friction // Engineering Fracture Mechanics. — 2004. — Vol. 71, No. 3. — P. 289–307.
198. Dobroskok A., Ghassemi A., Linkov A. Extended structural criterion for numerical simulation of crack propagation and coalescence under compressive loads // Int. J. Fracture. — 2005. — Vol. 133, No. 3. — P. 223–246.
199. Goldstein R.V., Salganik R.L. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks // Int. J. Fracture. — 1974. — Vol. 10. — P. 507–523.

200. Richard H.A., Fulland M., Sander M. Theoretical crack path prediction // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures*. — 2005. — Vol. 28, No. 1-2. — P. 3–12.
201. Schollmann M., Richard H.A., Kullmer G., Fulland M. A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures // *Int. J. Fracture*. — 2002. — Vol. 117. — P. 129–141.
202. Cooke M.L., D.D. Pollard. Fracture propagation paths under mixed mode loading within rectangular blocks of polymethyl methacrylate // *Journal of Geophysical Research*. — 1996. — Vol. 101, No. B2. — P. 3387–3400.
203. Pereira J.P.A. Generalized finite element methods for three-dimensional crack growth simulations: Ph.D. thesis / J.P.A. Pereira ; Department of Civil and Environmental Engineering, University of Illinois. — Urbana-Champaign, 2010. — 221 p. URL: <http://hdl.handle.net/2142/15598>.
204. Garagash D.I. Transient solution for a plane-strain fracture driven by a shear-thinning, power-law fluid // *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. — 2006. — Vol. 30, No. 14. — P. 1439–1475.
205. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. — 3-е изд. — М.: Наука, 1986. — Т. VI. Гидродинамика. — 736 с.
206. Kauzlarich J.J., Greenwood J.A. Elastohydrodynamic lubrication with Herschel-Bulkley model greases // *ASLE Transactions*. — 1972. — Vol. 15, No. 4. — P. 269–277.
207. Fox R.W., McDonald A.T., Pritchard P.J., Mitchell J.W. *Fluid mechanics*. — 9th edition. — John Wiley & Sons, 2015. — ISBN: 978-1-118-96127-8.
208. 13503-1:2011 ISO. Petroleum and natural gas industries – Completion fluids and materials – Part 1: Measurement of viscous properties of completion fluids. — Geneva, Switzerland: International Organization for Standardization, 2011.
209. Montgomery C. *Fracturing fluids* // *Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing* / Ed. by R. Jeffrey. — InTech, 2013.
210. Kartoatmodjo T., Schmidt Z. Large data bank improves crude physical property correlations // *Oil and Gas Journal*. — 1994. — Vol. 92, No. 27. — P. 51–55.
211. Savitski A.A., Detournay E. Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions // *Int. J. Solids and Structures*. — 2002. — Vol. 39, No. 26. — P. 6311–6337.

212. Desroches J., Thiercelin M. Modelling the propagation and closure of micro-hydraulic fractures // *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*. — 1993. — Vol. 30, No. 7. — P. 1231–1234.
213. Carbonell R., Desroches J., Detournay E. A comparison between a semi-analytical and a numerical solution of a two-dimensional hydraulic fracture // *Int. J. Solids and Structures*. — 1999. — Vol. 36, No. 31-32. — P. 4869–4888.
214. Шер Е.Н., Колыхалов И.В. Особенности последовательного развития близко расположенных трещин гидроразрыва // *ФТПРПИ*. — 2011. — № 6. — С. 43–53.
215. Колыхалов И.В., Мартынюк П.А., Шер Е.Н. Моделирование развития трещин при последовательном поинтервальном гидроразрыве пласта вязкой жидкостью // *ФТПРПИ*. — 2016. — № 4. — С. 39–48.
216. Peirce A, Bungler A. Interference fracturing: Nonuniform distributions of perforation clusters that promote simultaneous growth of multiple hydraulic fractures // *SPE Journal*. — 2015. — Vol. 20, No. 02. — P. 384–395.
217. Rahman M.M., Rahman M.K., Rahman S.S. An integrated model for multiobjective design optimization of hydraulic fracturing // *J. Petroleum Science and Engineering*. — 2001. — Vol. 31, No. 1. — P. 41–62.
218. Rahman M.M., Rahman M.K., Rahman S.S. Multivariate fracture treatment optimization for enhanced gas production from tight reservoirs // *SPE Gas Technology Symposium*. — 2002. — SPE-75702-MS.
219. Will J. Optimizing of hydraulic fracturing procedure using numerical simulation // *Weimar Optimization and Stochastic Days 2010*. — 2010. — P. 1–18.
220. Maron S.H., Pierce P.E. Application of ree-eyring generalized flow theory to suspensions of spherical particles // *Journal of Colloid Science*. — 1956. — Vol. 11, No. 1. — P. 80–95.
221. Mueller S., Llewellyn E.W., Mader H.M. The rheology of suspensions of solid particles // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2009. — Vol. 466, No. 2116. — P. 1201–1228.
222. Economides M., Oligney R., Valko P. *Unified Fracture Design: Bridging the Gap Between Theory and Practice*. — Alvin, Texas: Orsa Press, 2002. — ISBN: 0971042705.
223. Dake L.P. *Fundamentals of reservoir engineering*. — Amsterdam, Boston: Elsevier, 1978. — ISBN: 9780444418302.

224. Economides M. Petroleum production systems. — Englewood Cliffs, N.J.: PTR Prentice Hall, 1994. — ISBN: 9780136586838.
225. Valko P., Economides M.J. Fluid leakoff delineation in high-permeability fracturing // SPE Production Operations Symposium. — 1997. — SPE-37403-MS.
226. Romero D.J., Valko P.P., Economides M.J. The optimization of the productivity index and the fracture geometry of a stimulated well with fracture face and choke skins // International Symposium and Exhibition on Formation Damage Control. — 2003. — SPE-73758-MS.
227. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д. Нефтегазовая гидромеханика. — М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — ISBN: 5939724051.
228. Liu T., Porcu M.M., Ehlig-Economides C.A., Economides M.J. A study of transversely vs longitudinally fractured horizontal wells in a moderate-permeability gas reservoir // Journal of Engineering Research. — 2013. — Vol. 1, No. 2. — P. 139–156.
229. Lyutov A.E., Chirkov D.V., Skorospelov V.A., Turuk P.A., Cherny S.G. Coupled multipoint shape optimization of runner and draft tube of hydraulic turbines // Journal of Fluids Engineering. — 2015. — Vol. 137, No. 11. — P. 11.

Научное издание

Черный Сергей Григорьевич
Лапин Василий Николаевич
Есипов Денис Викторович
Куранаков Дмитрий Сергеевич

Методы
моделирования зарождения
и распространения трещин

Редактор Н.А. Лившиц
Корректор Н.В. Счастлива
Оригинал-макет подготовлен в ИВТ СО РАН

Подписано в печать 25.11.2016 Уч.-изд. л. 17 Печ. л. 19.5
Формат (60×90)1/16. Тираж 500 экз. Заказ 325

Издательство СО РАН
630090, Новосибирск, Морской просп. 2
E-mail: psb@sibran.ru
Тел. (383) 330-80-50
Отпечатано в Издательстве СО РАН
Интернет-магазин Издательства СО РАН
www.sibran.ru